基于特征系统实现算法的改进次同步振荡参数辨识

曾雪洋[1,2],陈 刚[1,2],刘一霖[3],张 放[3],史华勃[1,2],王 曦[1,2]
(1. 国网四川省电力公司电力科学研究院,四川 成都 610041;2. 电力物联网四川省重点实验室,四川 成都 610041;3. 北京交通大学电气工程学院,北京 100044)

摘 要:基于特征系统实现算法(eigensystem realization algorithm,ERA)求解简便、运算量小的优点,提出了一种改进的次同步振荡参数辨识方法。改进的算法先通过拼接同步相量的实部矩阵和虚部矩阵构造实数域汉克尔矩阵,并对其进行矩阵分解得到系统矩阵,再求系统矩阵的特征值从而实现次同步振荡角频率的提取,仅利用 200 ms 的同步相量序列即可实现次同步振荡参数的高效辨识。改进的 ERA 有效解决了现有 ERA 在辨识过程中未考虑基波分量和振荡分量的角频率两两共轭约束的局限。再分别利用合成和实际测量的同步相量测量终端数据对改进的 ERA 进行验证研究,结果表明所提算法可以准确提取基波和次同步/超同步振荡参数,并有效实现次同步振荡的动态实时监测。

关键词:同步相量; 次同步振荡; 参数辨识; 特征系统实现算法
中图分类号:TM 712 **文献标志码**:A **文章编号**:1003-6954(2025)01-0001-09
DOI:10.16527/j.issn.1003-6954.20250101

Improved Subsynchronous Oscillation Parameter Identification Based on Eigensystem Realization Algorithm

ZENG Xueyang[1,2], CHEN Gang[1,2], LIU Yilin[3], ZHANG Fang[3], SHI Huabo[1,2], WANG Xi[1,2]
(1. State Grid Sichuan Electric Power Research Institute, Chengdu 610041, Sichuan, China;2. Power Internet of Things Key Laboratory of Sichuan Province, Chengdu 610041, Sichuan, China;
3. School of Electrical Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract:Based on the simplicity and low computational cost of eigensystem realization algorithm (ERA), an improved parameter identification method for subsynchronous oscillation is proposed. The improved algorithm constructs the real domain Hankel matrix by splicing the real part matrix and the imaginary part matrix of synchrophasor and decomposes it to get the system matrix, and then it calculates the eigenvalues of system matrix so as to extract the angular frequency of subsynchronous oscillations. The efficient identification of subsynchronous oscillations parameters can be realized only by using the synchrophasor sequence of 200 ms. The improved ERA effectively solves the limitations that the pairwise conjugate constraints of angular frequency of fundamental and oscillatory components are not considered in the identification process of existing ERA. Finally, the improved ERA is verified by using the synthetic and actual synchrophasor measurement terminal data, and the results show that the proposed algorithm can accurately extract the fundamental and subsynchronous/supersynchronous oscillation parameters, and effectively realize the dynamic real-time monitoring of the subsynchronous oscillations.

Key words:synchrophasor; subsynchronous oscillation; parameter identification; eigensystem realization algorithm

0 引 言

随着新能源发电的大规模并网集成,以及各种大容量电力电子装置的广泛应用,电网中的次同步振荡(subsynchronous oscillation,SSO)问题正逐渐成为潜在的重大风险。SSO 不仅会降低系统的传输能力,还可能危及系统的安全运行,甚至导致系统振荡失稳。因此,对电力系统中 SSO 的动态过程进行持续、密切的监测,并在发现潜在风险时采取有效措施,显得尤为关键[1-2]。

基金项目:国家电网有限公司科技项目(521997230001)

SSO 动态过程的检测方法已有很多。文献[3]利用数字故障记录器对 SSO 进行在线监测，并证明了电气和机械信号都可以用于 SSO 监测。文献[4]介绍了一种基于模型的参数辨识方法——普罗尼(Prony)分析法，该方法在信噪比高时精度较高，但计算量大、计算时间长。以上方法都需要用到故障记录器提供的瞬时数据，但由于故障记录器安装在不同的总线上，及时收集这些数据具有挑战性。

目前，广域测量系统(wide-area measurement system，WAMS)及同步相量测量终端(phasor measurement unit，PMU)已经在电力系统中大范围应用。基于同步相量数据进行 SSO 分析的最大优势在于不同厂站测量的数据因具有统一时标而有可比性。现有的基于同步相量进行 SSO 参数识别的方法，可以按是否基于离散傅里叶变换(discrete Fourier transform，DFT)来分类。

在基于 DFT 的算法中，文献[5]利用 WAMS/PMU，分析了同步相量的快速傅里叶变换算法和采样率对其幅值谱的影响，并给出了同步相量幅值谱的修正比例，实现了 SSO 参数的辨识。但是该方法需要较大的数据窗口(10 s)来准确地提取 SSO 分量的参数，在识别快速变化的 SSO 时其实时性和可靠性较低。因此，文献[6]提出了一种结合汉宁窗口(Hanning window)的插值 DFT 方法，不仅将数据窗缩短到 2 s，而且可以有效地消除频谱混叠的影响。文献[7]在文献[5]的基础上提出了基于加阻尼莱夫-文森特(Rife-Vincent) M 阶窗函数的插值方法对同步相量进行频谱分析，进一步提高了 SSO 辨识精度，并将数据窗口缩短至 2 s。

在非 DFT 算法中主要有两种模态参数提取算法，即矩阵束方法[8]和特征系统实现算法[9]。非 DFT 算法受频谱分辨率的限制小，因此在缩短时间窗口至 2 s 时，这种方法仍能保持较高的参数辨识精度。虽然上述基于同步相量的 SSO 参数识别方法在一定程度上保证了识别 SSO 参数的准确性，但是 2 s 仍是一个较长的时间窗口。此外，上述方法没有考虑基波分量以及振荡分量的正、负分量的角频率共轭约束，这会导致 SSO 参数辨识的准确性降低。

在 SSO 参数辨识领域中，特征系统实现算法(eigensystem realization algorithm，ERA)是一种经典的模态参数提取算法，它将模态参数提取转化为矩阵分解，求解简单。但它也有明显的缺点，其一是需要 1 s 的数据窗口以确保参数辨识结果的精确度；其二是未考虑角频率共轭约束。在研究过程中通常基于模型固定不变进行分析，但在实际应用中这些模型往往会受多种因素影响而发生变化。较长的数据窗口会更加局限于模型固定的假设。因此，基于实际应用，缩短数据窗是必要的；但缩短数据窗后改进 ERA 的辨识精度会大大降低，需对算法进行改进，使其在较短的数据窗也能保持较高的精确度。

下面从汉克尔矩阵的构造方面对现有 ERA 进行改进，以解决现有 ERA 得到的角频率不能总是满足两两共轭的问题。同时，改进后的 ERA 将数据窗口缩短至 200 ms，可以较好地弱化假定模型不变带来的局限。使用合成和实际测量的 PMU 数据对所改进的 ERA 方法进行仿真验证，结果表明所提方法不仅可以将数据窗口缩短至 200 ms，还保证了 SSO 参数辨识的精确度。

1 同步相量模型和模态参数提取

1.1 同步相量的模态模型

首先，建立电力系统的电流或电压的瞬时信号模型，并假设该模型在所选取的数据窗口内保持固定不变，记作 $x(t)$。

$$x(t)=x_0\cos(2\pi f_0 t+\phi_0)+x_{\mathrm{sub}}\cos(2\pi f_{\mathrm{sub}}t+\phi_{\mathrm{sub}})+x_{\mathrm{sup}}\cos(2\pi f_{\mathrm{sup}}t+\phi_{\mathrm{sub}}) \tag{1}$$

式中：f、x、ϕ 分别为频率、幅值、初相位；下标“0、sub、sup”分别表示基波、次同步、超同步分量。

根据 IEEE std C37.118 标准规定，对式(1)进行 DFT，得到与瞬时信号 $x(t)$ 相对应的同步相量序列 $\dot{X}(k)$[10]，如式(2)所示。

$$\dot{X}(k)=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi})\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}=\dot{X}_0(k)+\dot{X}_{\mathrm{sub}}(k)+\dot{X}_{\mathrm{sup}}(k) \tag{2}$$

式中，N 为根据瞬时值计算同步相量时的数据采样点总数。通常选择在一个基波周期 $1/f_{\mathrm{N}}$(f_{N} 为电力系统的额定频率)内的瞬时值采样点数，因此瞬时值的采样率是 Nf_{N}。

对式(2)应用欧拉公式，将不同分量对应的同步相量分成正频率分量和负频率分量。以超同步分量为例，其分解过程为

$$\dot{X}_{\sup}(k)=(e^{jk\pi})\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_{\sup}\cos(2\pi f_{\sup}t+\phi_{\sup})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}=$$
$$Q(f_{\sup},-1)x_{\sup}e^{j\phi_{\sup}}e^{j\frac{2\pi(f_{\sup}-f_N)k}{f_s}}+$$
$$Q^*(f_{\sup},+1)x_{\sup}e^{-j\phi_{\sup}}e^{-j\frac{2\pi(f_N-f_{\sup})k}{f_s}} \quad (3)$$

式中：上标“ * ”表示共轭；f_s 为同步相量数据的上传频率，且 $f_s=2f_N$。

引入了函数 $Q(f,l)$ 表示同步相量的计算过程，f 为各分量的频率，l 为+1 或−1 分别表示正频率或负频率，其函数表达式为

$$Q(f,l)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{\left(j\frac{2\pi f}{f_N N}+j\frac{2\pi}{N}l\right)n} \quad (4)$$

基波分量、次同步分量和超同步分量中均包含正频率分量和负频率分量。因此同步相量各分量的表达式如下：

$$\begin{cases}\dot{X}_0^+(k)=Q^*(f_0,+1)x_0e^{-j\phi_0}e^{j\omega_0k}\\ \dot{X}_0^-(k)=Q(f_0,-1)x_0e^{j\phi_0}e^{-j\omega_0^*k}\end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases}\dot{X}_{\mathrm{sub}}^+(k)=Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}e^{j\omega_{\mathrm{sub}}k}\\ \dot{X}_{\mathrm{sub}}^-(k)=Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}e^{-j\omega_{\mathrm{sub}}^*k}\end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases}\dot{X}_{\sup}^+(k)=Q(f_{\sup},-1)x_{\sup}e^{j\phi_{\sup}}e^{j\omega_{\sup}k}\\ \dot{X}_{\sup}^-(k)=Q^*(f_{\sup},+1)x_{\sup}e^{-j\phi_{\sup}}e^{-j\omega_{\sup}^*k}\end{cases} \quad (7)$$

式中，上标“+、−”表示各分量的正频率和负频率分量。

在式(5)—式(7)中引入了各分量的角频率，其表达式为

$$\begin{cases}\omega_0=2\pi\dfrac{f_N-f_0}{f_s}\\ \omega_{\mathrm{sub}}=2\pi\dfrac{f_N-f_{\mathrm{sub}}}{f_s}\\ \omega_{\sup}=2\pi\dfrac{f_{\sup}-f_N}{f_s}\end{cases} \quad (8)$$

由于次同步分量和超同步分量是一对频率耦合的振荡分量，且基波分量的频率 f_0 接近于 f_N，因此二者频率满足的关系可用式(9)表示。

$$f_{\mathrm{sub}}+f_{\sup}=2f_N \quad (9)$$

基于式(9)，可以推导出 $\omega_{\mathrm{sub}}=\omega_{\sup}^*$ 和 $\omega_{\mathrm{sub}}^*=\omega_{\sup}$，为简化公式，令：

$$\begin{cases}\alpha=\omega_0\\ \beta=\omega_{\mathrm{sub}}=\omega_{\sup}^*\end{cases} \quad (10)$$

又因为次同步分量和超同步分量的正、负频率部分频率相同，可以将二者合并成振荡分量以简化同步相量序列 $\dot{X}(k)$，则有：

$$\dot{X}(k)=\dot{X}_0^+(k)+\dot{X}_0^-(k)+\dot{X}_{\mathrm{sub}}^+(k)+$$
$$\dot{X}_{\mathrm{sub}}^-(k)+\dot{X}_{\sup}^+(k)+\dot{X}_{\sup}^-(k)=$$
$$\dot{X}_0^+(k)+\dot{X}_0^-(k)+\dot{X}_s^+(k)+\dot{X}_s^-(k) \quad (11)$$

$$\begin{cases}\dot{X}_0^+(k)=Q^*(f_0,+1)x_0e^{-j\phi_0}e^{j\alpha k}\\ \dot{X}_0^-(k)=Q(f_0,-1)x_0e^{j\phi_0}e^{-j\alpha k}\end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases}\dot{X}_s^+(k)=Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}e^{j\beta k}+\\ \qquad Q(f_{\sup},-1)x_{\sup}e^{j\phi_{\sup}}e^{j\beta k}\\ \dot{X}_s^-(k)=Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}e^{-j\beta k}+\\ \qquad Q^*(f_{\sup},+1)x_{\sup}e^{-j\phi_{\sup}}e^{-j\beta k}\end{cases} \quad (13)$$

式中，α、β 分别为基波分量和振荡分量的角频率。

鉴于 ERA 是一种模态参数提取算法，因此研究了同步相量的模态模型。依据文献[11]，可将同步相量表示成 4 个模态相加的形式：

$$\dot{X}(k)=\sum_{m=1}^{4}R_me^{\omega_mk} \quad (14)$$

$$\begin{cases}R_1=Q^*(f_0,+1)x_0e^{-j\phi_0}\\ R_2=Q(f_0,-1)x_0e^{j\phi_0}\\ R_3=Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\sup},-1)x_{\sup}e^{j\phi_{\sup}}\\ R_4=Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q^*(f_{\sup},+1)x_{\sup}e^{-j\phi_{\sup}}\end{cases} \quad (15)$$

$$\omega_1=j\alpha,\omega_2=-j\alpha,\omega_3=j\beta,\omega_4=-j\beta \quad (16)$$

式中：ω_m 为角频率；R_m 为 $k=0$ 时 m 模态的基准值；k 为角频率随时间变化的特征。

由式(14)—式(16)可知，SSO 下的同步相量序列 $\dot{X}(k)$ 是由 4 个模态构成的模型，即 4 个复指数和 4 个常参数线性组合而成的模态模型。

1.2　模态参数提取问题

从海量的同步相量数据中提取 SSO 的角频率参数是一个典型的模态参数提取问题，而 ERA 是一种经典模态参数提取算法。它通过构造汉克尔矩阵和系统矩阵将提取模态参数转化为矩阵分解。这种方法可以直接确定基波分量和振荡分量的角频率，计算成本低，求解效率高。

ERA 巧妙地利用了同步相量序列的时间连续性，通过构建两个具有特定移位的汉克尔矩阵来提取信息。利用两个移位汉克尔矩阵之间的关系，可以得到系统矩阵，即 $\mathrm{diag}(e^{\omega_1},e^{\omega_2},e^{\omega_3},e^{\omega_4})$。然后依据式(16)对系统矩阵求解特征值，再进一步即可求出基波分量和振荡分量的角频率。

在 SSO 参数辨识领域，存在多种方法，但相比

之下，ERA 方法以其简洁的求解过程和高效的计算效率脱颖而出，因此选择基于 ERA 提出一种电网次同步振荡参数辨识方法。

2 基于改进 ERA 的 SSO 参数辨识

2.1 ERA 的基本原理

现有 ERA 基于同步相量模型的特征进行汉克尔矩阵的构造，它通过构造两个移位的汉克尔矩阵，并利用它们之间的特定关系，推导出系统矩阵。

利用同步相量序列 $\dot{\boldsymbol{X}}(k)$ 构造两个移位汉克尔矩阵，将其记为 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Y}'$。

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}(0) & \dot{\boldsymbol{X}}(1) & \cdots & \dot{\boldsymbol{X}}(L)\\ \dot{\boldsymbol{X}}(1) & \dot{\boldsymbol{X}}(2) & \cdots & \dot{\boldsymbol{X}}(L+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dot{\boldsymbol{X}}(K-L-1) & \dot{\boldsymbol{X}}(K-L) & \cdots & \dot{\boldsymbol{X}}(K-1)\end{bmatrix}\tag{17}$$

$$\boldsymbol{Y}'=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}(1) & \dot{\boldsymbol{X}}(2) & \cdots & \dot{\boldsymbol{X}}(L+1)\\ \dot{\boldsymbol{X}}(2) & \dot{\boldsymbol{X}}(3) & \cdots & \dot{\boldsymbol{X}}(L+2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dot{\boldsymbol{X}}(K-L) & \dot{\boldsymbol{X}}(K-L+1) & \cdots & \dot{\boldsymbol{X}}(K)\end{bmatrix}\tag{18}$$

式中：K 为同步相量的数目；L+1 为矩阵的列数。汉克尔矩阵中每一行和每一列均具有时间连续性。

根据第 1.1 节可知，SSO 下的同步相量模型由 4 个模态线性组合而成。因此，将汉克尔矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 进行奇异值分解，表示为：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{Z}_2\tag{19}$$

$$\boldsymbol{Z}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \mathrm{e}^{\omega_1} & \mathrm{e}^{\omega_2} & \mathrm{e}^{\omega_3} & \mathrm{e}^{\omega_4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathrm{e}^{\omega_1(K-L-1)} & \mathrm{e}^{\omega_2(K-L-1)} & \mathrm{e}^{\omega_3(K-L-1)} & \mathrm{e}^{\omega_4(K-L-1)}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z}_2=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{e}^{\omega_1} & \cdots & \mathrm{e}^{\omega_1 L}\\ 1 & \mathrm{e}^{\omega_2} & \cdots & \mathrm{e}^{\omega_2 L}\\ 1 & \mathrm{e}^{\omega_3} & \cdots & \mathrm{e}^{\omega_3 L}\\ 1 & \mathrm{e}^{\omega_4} & \cdots & \mathrm{e}^{\omega_4 L}\end{bmatrix}\tag{20}$$

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}(R_1,R_2,R_3,R_4)\tag{21}$$

式中：$\boldsymbol{Z}_1$ 为左奇异矩阵；$\boldsymbol{Z}_2$ 为右奇异矩阵；$\boldsymbol{R}$ 为特征值矩阵。

依据两个移位汉克尔矩阵之间的特性，可将汉克尔矩阵 $\boldsymbol{Y}'$ 表示为

$$\boldsymbol{Y}'=\boldsymbol{Z}_1'\boldsymbol{R}\boldsymbol{Z}_2'=\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{Z}_0\,\boldsymbol{Z}_2\tag{22}$$

式中，$\boldsymbol{Z}_0$ 为系统矩阵，可表示为 $\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\omega_1},\mathrm{e}^{\omega_2},\mathrm{e}^{\omega_3},\mathrm{e}^{\omega_4})$。

依据 $\boldsymbol{Z}_0$ 的表达式可知，4 个角频率的值只需要通过求解 $\boldsymbol{Z}_0$ 的特征值即可获得，因此得到 $\boldsymbol{Z}_0$ 是非常关键的。$\boldsymbol{Z}_0$ 的表达式为

$$\boldsymbol{Z}_0=\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{Z}_1^{-1}\boldsymbol{Y}'\,\boldsymbol{Z}_2^{-1}\,\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\tag{23}$$

得到 $\boldsymbol{Z}_0$ 之后，对 $\boldsymbol{Z}_0$ 求解特征值即可得到 4 个复指数。对 4 个复指数取对数可以得到基波和振荡分量角频率。

从求解过程中可以看出，ERA 最大的优势是通过矩阵分解的形式来提取 SSO 的角频率参数，该过程运算量小，计算效率高，这使得它在处理快速变化的 SSO 信号时具有优势。但该算法在实际应用于辨识电力系统的 SSO 参数中仍存在缺陷。

2.2 现有 ERA 的缺陷

现有 ERA 直接基于复数域的同步相量构造汉克尔矩阵，得到复数域系统矩阵。求解复数域系统矩阵的特征值，可以得到 4 种模态的角频率。

从数学角度上讲，现有 ERA 方法在理想条件下可以精确辨识 SSO 参数。在求解复数域系统矩阵的特征值时，可以得到两两共轭的系统矩阵特征值。但是，在实际应用中瞬时信号里会有各种扰动，而直接求解复数域系统矩阵 $\boldsymbol{Z}_0$ 得到的特征值不再满足两两共轭关系，而且一对特征值距离共轭的理想情况偏差较大。

同样从数学角度讲，求解实数矩阵的特征值可以保证特征值无论在理想条件下还是在噪声条件下均满足两两共轭约束。那么，如果能够构造实数域汉克尔矩阵，在理论上，角频率共轭约束问题就可以解决。构造实数域汉克尔矩阵是所提方法的基本出发点，是改进 ERA 与现有 ERA 本质的差别。

2.3 改进 ERA 的基本思想

2.3.1 构造实数域汉克尔矩阵

1）构造两个实数域移位汉克尔矩阵。

利用第 2.1 节中构造的复数域汉克尔矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Y}'$，分别提取同步相量序列的实部和虚部，构造了两个实数域移位汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}'$。构造实数域汉克尔矩阵的详细过程如下：

首先，提取出同步相量序列的实部矩阵和虚部矩阵，如式(24)和式(25)所示。

$$\mathrm{Re}(2\boldsymbol{Y})=\begin{bmatrix}2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(0)] & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & \cdots & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(L)]\\ 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(2)] & \cdots & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(L+1)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L-1)] & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L)] & \cdots & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-1)]\end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\mathrm{Im}(2\boldsymbol{Y})=\begin{bmatrix}2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(0)] & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & \cdots & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(L)]\\ 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(2)] & \cdots & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(L+1)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L-1)] & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L)] & \cdots & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(L-1)]\end{bmatrix} \tag{25}$$

式中，Re、Im 分别为同步相量的实部和虚部。

其次，将实部矩阵和虚部矩阵拼接构造实数域汉克尔矩阵。下面证明为何可以直接将实部矩阵和虚部矩阵拼接构造实数域汉克尔矩阵。

实部矩阵和虚部矩阵分别由同步相量序列的实部和虚部构成，因此需要进一步分析同步相量的实部和虚部的模态组成，分析过程如下：

依据式(11)、式(12)和式(15)，基波分量的实部和虚部可以表示为：

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}_0(k)]&=[\dot{\boldsymbol{X}}_0(k)+\dot{\boldsymbol{X}}_0^*(k)]=\\&\quad[(R_1+R_2^*)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha k}+(R_2+R_1^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha k}]\\2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}_0(k)]&=[\dot{\boldsymbol{X}}_0(k)-\dot{\boldsymbol{X}}_0^*(k)]=\\&\quad[(R_1-R_2^*)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha k}+(R_2-R_1^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha k}]\end{aligned} \tag{26}$$

对式(26)可以进一步简化，令：

$$\begin{cases}R_{0+}^{(\mathrm{r})}=R_1+R_2^*,\ R_{0-}^{(\mathrm{r})}=R_2+R_1^*\\R_{0+}^{(\mathrm{i})}=R_1-R_2^*,\ R_{0-}^{(\mathrm{i})}=R_2-R_1^*\end{cases} \tag{27}$$

观察式(27)可以发现引入的 4 个参数存在如下关系：

$$R_{0+}^{(\mathrm{r})}=R_{0-}^{(\mathrm{r})*},\quad R_{0+}^{(\mathrm{i})}=R_{0-}^{(\mathrm{i})*} \tag{28}$$

同理，依据式(11)、式(13)和式(15)，振荡分量的实部和虚部可以表示为：

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}_s(k)]&=[\dot{\boldsymbol{X}}_s(k)+\dot{\boldsymbol{X}}_s^*(k)]=\\&\quad[(R_3+R_4^*)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k}+(R_4+R_3^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta k}]\\2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}_s(k)]&=[\dot{\boldsymbol{X}}_s(k)-\dot{\boldsymbol{X}}_s^*(k)]=\\&\quad[(R_3-R_4^*)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k}+(R_4-R_3^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta k}]\end{aligned} \tag{29}$$

式(29)亦可以进一步简化，令：

$$\begin{cases}R_{s+}^{(\mathrm{r})}=R_3+R_4^*,\ R_{s-}^{(\mathrm{r})}=R_4+R_3^*\\R_{s+}^{(\mathrm{i})}=R_3-R_4^*,\ R_{s-}^{(\mathrm{i})}=R_4-R_3^*\end{cases} \tag{30}$$

引入的这 4 个参数同样存在以下关系

$$R_{s+}^{(\mathrm{r})}=R_{s-}^{(\mathrm{r})*},\quad R_{s+}^{(\mathrm{i})}=R_{s-}^{(\mathrm{i})*} \tag{31}$$

至此，结合式(11)、式(26)、式(28)、式(29)和式(31)，同步相量的实部和虚部可表示为

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(k)]&=2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}_0(k)]+2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}_s(k)]=\\&\quad R_{0+}^{(\mathrm{r})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha k}+R_{0+}^{(\mathrm{r})*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha k}+R_{s+}^{(\mathrm{r})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k}+R_{s+}^{(\mathrm{r})*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta k}\\2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(k)]&=2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}_0(k)]+2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}_s(k)]=\\&\quad R_{0+}^{(\mathrm{i})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha k}+R_{0+}^{(\mathrm{i})*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha k}+R_{s+}^{(\mathrm{i})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k}+R_{s+}^{(\mathrm{i})*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta k}\end{aligned} \tag{32}$$

根据式(32)，可确定同步相量拆分成的实部和虚部也是由 4 种模态组成。实部和虚部与完整的同步相量之间的差异仅仅体现在复指数前的常参数不同，而模态模式相同，因此可以将同步相量的实部矩阵和虚部矩阵拼接构造实数域汉克尔矩阵。这部分内容是改进 ERA 方法最核心的理论支撑，也是所提改进最核心的贡献。

将实部矩阵和虚部矩阵直接拼接得到所提改进 ERA 方法中的实数域汉克尔矩阵，如式(33)所示。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(0)] & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & \cdots & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(L)]\\ 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(2)] & \cdots & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(L+1)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L-1)] & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L)] & \cdots & 2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-1)]\\ 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(0)] & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & \cdots & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(L)]\\ 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(1)] & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(2)] & \cdots & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(L+1)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L-1)] & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-L)] & \cdots & 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(K-1)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(2\boldsymbol{Y})\\ \mathrm{Im}(2\boldsymbol{Y})\end{bmatrix} \tag{33}$$

同理，另一个实数域汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}'$ 为

$$\boldsymbol{H}'=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(2\boldsymbol{Y}')\\ \mathrm{Im}(2\boldsymbol{Y}')\end{bmatrix} \tag{34}$$

从整体上来看，将实部矩阵和虚部矩阵拼接即得到了改进 ERA 方法中的实数域汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}'$。

2）对实数域汉克尔矩阵进行奇异值分解并求解系统矩阵。

仿照式(19)的形式，将汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}$ 也进行奇异值分解，并写成 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{URV}$ 的形式，构造过程如下：

$\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(k)]$ 和 $\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(k)]$ 中基波分量的正、负分量的系数虽不相等但都是常数，可以通过一定的

倍数用 R_m 表示。因此,引入 4 个常数,表示同步相量实部和虚部的基波分量中的常参数与(R_1、R_2)的倍数关系,表达式为

$$\begin{cases}\gamma_1^{(r)}R_1=R_{0+}^{(r)}, & \gamma_2^{(r)}R_2=R_{0+}^{(r)^*}\\ \gamma_1^{(i)}R_1=R_{0+}^{(i)}, & \gamma_2^{(i)}R_2=R_{0+}^{(i)^*}\end{cases} \tag{35}$$

式中,$\gamma_n^{(r)}$ 和 $\gamma_n^{(i)}$($n=1,2$)即为 4 个常数。联立式(15)、式(27)和式(35),可以得到 $\gamma_n^{(r)}$ 和 $\gamma_n^{(i)}$($n=1,2$)。其中 $\gamma_1^{(r)}$ 的详细推导过程如式(36)所示。

$$\gamma_1^{(r)}=\frac{R_{0+}^{(r)}}{R_1}=\frac{R_1+R_2^*}{R_1}=\frac{Q^*(f_0,+1)+Q^*(f_0,-1)}{Q^*(f_0,+1)} \tag{36}$$

同理,剩余 3 个常数的表达式如式(37)所示。

$$\begin{cases}\gamma_2^{(r)}=\dfrac{Q(f_0,+1)+Q(f_0,-1)}{Q(f_0,-1)}\\ \gamma_1^{(i)}=\dfrac{Q^*(f_0,+1)-Q^*(f_0,-1)}{Q^*(f_0,+1)}\\ \gamma_2^{(i)}=\dfrac{Q(f_0,-1)-Q(f_0,+1)}{Q(f_0,-1)}\end{cases} \tag{37}$$

同样地,引入另外 4 个常数,表示同步相量实部和虚部的振荡分量中常参数与(R_3、R_4)的倍数关系,表达式为

$$\begin{cases}\gamma_3^{(r)}R_3=R_{s+}^{(r)}, & \gamma_4^{(r)}R_4=R_{s+}^{(r)^*}\\ \gamma_3^{(i)}R_3=R_{s+}^{(i)}, & \gamma_4^{(i)}R_4=R_{s+}^{(i)^*}\end{cases} \tag{38}$$

式中,$\gamma_n^{(r)}$ 和 $\gamma_n^{(i)}$($n=3,4$)是 4 个常数。联立式(15)、式(30)和式(38),可以得到 $\gamma_n^{(r)}$ 和 $\gamma_n^{(i)}$($n=3,4$)。其中 $\gamma_3^{(r)}$ 的详细推导过程如式(39)所示。

$$\begin{aligned}\gamma_3^{(r)}&=\frac{R_{s+}^{(r)}}{R_3}=\frac{R_3+R_4^*}{R_3}=\\ &\frac{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}+\\ &\frac{Q^*(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},+1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}=\\ &\frac{[Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)+Q^*(f_{\mathrm{sub}},-1)]x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}}{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}+\\ &\frac{[Q(f_{\mathrm{sup}},-1)+Q(f_{\mathrm{sup}},+1)]x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}\end{aligned} \tag{39}$$

同理,剩下 3 个常数的表达式如式(40)所示。

$$\begin{cases}\gamma_4^{(r)}=\dfrac{[Q(f_{\mathrm{sub}},+1)+Q(f_{\mathrm{sub}},-1)]x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}}{Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q^*(f_{\mathrm{sup}},+1)x_{\mathrm{sup}}e^{-j\phi_{\mathrm{sup}}}}+\\ \qquad\dfrac{[Q^*(f_{\mathrm{sup}},-1)+Q^*(f_{\mathrm{sup}},+1)]x_{\mathrm{sup}}e^{-j\phi_{\mathrm{sup}}}}{Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q^*(f_{\mathrm{sup}},+1)x_{\mathrm{sup}}e^{-j\phi_{\mathrm{sup}}}}\\ \gamma_3^{(i)}=\dfrac{[Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)-Q^*(f_{\mathrm{sub}},-1)]x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}}{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}+\\ \qquad\dfrac{[Q(f_{\mathrm{sup}},-1)-Q(f_{\mathrm{sup}},+1)]x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}{Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1)x_{\mathrm{sub}}e^{-j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q(f_{\mathrm{sup}},-1)x_{\mathrm{sup}}e^{j\phi_{\mathrm{sup}}}}\\ \gamma_4^{(i)}=\dfrac{[Q(f_{\mathrm{sub}},+1)-Q(f_{\mathrm{sub}},-1)]x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}}{Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q^*(f_{\mathrm{sup}},+1)x_{\mathrm{sup}}e^{-j\phi_{\mathrm{sup}}}}+\\ \qquad\dfrac{[Q^*(f_{\mathrm{sup}},-1)-Q^*(f_{\mathrm{sup}},+1)]x_{\mathrm{sup}}e^{-j\phi_{\mathrm{sup}}}}{Q(f_{\mathrm{sub}},-1)x_{\mathrm{sub}}e^{j\phi_{\mathrm{sub}}}+Q^*(f_{\mathrm{sup}},+1)x_{\mathrm{sup}}e^{-j\phi_{\mathrm{sup}}}}\end{cases} \tag{40}$$

依据式(29)、式(35)和式(37),同步相量的实部和虚部又可表示为

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{X}}(k)]&=(\gamma_1^{(r)}R_1e^{j\alpha k}+\gamma_2^{(r)}R_2e^{-j\alpha k}+\\ &\quad\gamma_3^{(r)}R_3e^{j\beta k}+\gamma_4^{(r)}R_4e^{-j\beta k})\\ 2\mathrm{Im}[\dot{\boldsymbol{X}}(k)]&=(\gamma_1^{(i)}R_1e^{j\alpha k}+\gamma_2^{(i)}R_2e^{-j\alpha k}+\\ &\quad\gamma_3^{(i)}R_3e^{j\beta k}+\gamma_3^{(i)}R_3e^{-j\beta k})\end{aligned} \tag{41}$$

新引入的 8 个常参数在实际求解的过程中并不需要计算出具体的数值,在这里将其引入只是为了更形象地表示 SSO 下的同步相量在拆成实部和虚部之后,它的实部和虚部也可以写成 4 个模态线性组合的形式。

根据式(36)和式(41),可以将实数域汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}$ 进行奇异值分解,写成 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{URV}$ 的形式,如图 1 所示。

结合式(36)、式(37)和式(41),可以发现实数域汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}'$ 具有与复数域汉克尔矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Y}'$ 相似的特性。因此,理论上可以将汉克尔矩阵 $\boldsymbol{H}'$ 表示成如式(42)所示的形式。

$$\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{U}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} \tag{42}$$

式中,$A=\mathrm{diag}(e^{\omega_1},e^{\omega_2},e^{\omega_3},e^{\omega_4})$,为系统矩阵。

至此,已构造了两个移位的实数域汉克尔矩阵。

2.3.2 SSO 参数的求解

ERA 将提取 SSO 参数转化成矩阵分解。因此,首先需要求解出系统矩阵 $\boldsymbol{A}$,以便进一步得到 4 个角频率。根据式(42),可以推理得到系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的求解表达式为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{H}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}} \tag{43}$$

在得到系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之后,即可求其特征值,并对其取对数得到 4 个角频率(ω_1、ω_2、ω_3、ω_4)的值。无论在理想条件下还是在有噪声的情况下,得到的

$$H=\underbrace{\begin{bmatrix}\gamma_1^{(r)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega1}\\ \vdots\\ e^{\omega1(K-L-1)}\end{pmatrix} & \gamma_2^{(r)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega2}\\ \vdots\\ e^{\omega2(K-L-1)}\end{pmatrix} & \gamma_3^{(r)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega3}\\ \vdots\\ e^{\omega3(K-L-1)}\end{pmatrix} & \gamma_4^{(r)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega4}\\ \vdots\\ e^{\omega4(K-L-1)}\end{pmatrix}\\ \gamma_1^{(i)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega1}\\ \vdots\\ e^{\omega1(K-L-1)}\end{pmatrix} & \gamma_2^{(i)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega2}\\ \vdots\\ e^{\omega2(K-L-1)}\end{pmatrix} & \gamma_3^{(i)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega3}\\ \vdots\\ e^{\omega3(K-L-1)}\end{pmatrix} & \gamma_4^{(i)}\begin{pmatrix}1\\ e^{\omega4}\\ \vdots\\ e^{\omega4(K-L-1)}\end{pmatrix}\end{bmatrix}}_{U} R \underbrace{\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & e^{\omega1} & \cdots & e^{\omega1L}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & e^{\omega2} & \cdots & e^{\omega2L}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & e^{\omega3} & \cdots & e^{\omega3L}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & e^{\omega4} & \cdots & e^{\omega4L}\end{pmatrix}\end{bmatrix}}_{V}$$

图 1　汉克尔矩阵奇异值分解

角频率 ω_1 和 ω_2 均满足 $\mathrm{j}\alpha$ 和 $-\mathrm{j}\alpha$ 的共轭关系，同时 ω_3 和 ω_4 也满足 $\mathrm{j}\beta$ 和 $-\mathrm{j}\beta$ 的共轭关系。因此，改进的 ERA 解决了现有 ERA 中未考虑角频率两两共轭约束的问题。

得到 4 个角频率后，可进一步求解同步相量各分量的频率、幅值和相位，求解过程如下：

1）根据式（44）可以求出 4 个模态的常参数（R_1、R_2、R_3、R_4）的数值。

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ e^{\mathrm{j}\alpha} & e^{-\mathrm{j}\alpha} & e^{\mathrm{j}\beta} & e^{-\mathrm{j}\beta}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ e^{\mathrm{j}\alpha(K-1)} & e^{-\mathrm{j}\alpha(K-1)} & e^{\mathrm{j}\beta(K-1)} & e^{-\mathrm{j}\beta(K-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\\ R_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{X}(0)\\ \dot{X}(1)\\ \vdots\\ \dot{X}(K-1)\end{bmatrix} \tag{44}$$

2）确定基波和振荡分量的正、负频率分量的计算值。

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}_0^+(k)=R_1e^{\mathrm{j}\alpha}, & \dot{\boldsymbol{X}}_0^-(k)=R_2e^{-\mathrm{j}\alpha}\\ \dot{\boldsymbol{X}}_s^+(k)=R_3e^{\mathrm{j}\beta}, & \dot{\boldsymbol{X}}_s^-(k)=R_4e^{-\mathrm{j}\beta}\end{cases} \tag{45}$$

3）确定基波分量的频率、幅值和相位。

$$f_0=\begin{cases}f_N-\dfrac{\alpha}{2\pi}f_s, & \|\dot{\boldsymbol{X}}_0^+(k)\|_2<\|\dot{\boldsymbol{X}}_0^-(k)\|_2\\ f_N+\dfrac{\alpha}{2\pi}f_s, & \|\dot{\boldsymbol{X}}_0^+(k)\|_2>\|\dot{\boldsymbol{X}}_0^-(k)\|_2\end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases}Q(f_0,-1)x_0e^{-\mathrm{j}\phi_0}=\dot{\boldsymbol{X}}_0^-(k), & \|\dot{\boldsymbol{X}}_0^+(k)\|_2<\|\dot{\boldsymbol{X}}_0^-(k)\|_2\\ Q^*(f_0,+1)x_0e^{-\mathrm{j}\phi_0}=\dot{\boldsymbol{X}}_0^+(k), & \|\dot{\boldsymbol{X}}_0^+(k)\|_2\geqslant\|\dot{\boldsymbol{X}}_0^-(k)\|_2\end{cases} \tag{47}$$

4）确定次同步和超同步分量的频率、幅值和相位。

$$\begin{cases}f_{\mathrm{sub}}=f_N-\dfrac{\beta f_s}{2\pi}\\ f_{\mathrm{sup}}=2f_N-f_{\mathrm{sub}}\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}Q^*(f_{\mathrm{sub}},+1) & Q(f_{\mathrm{sup}},-1)\\ Q^*(f_{\mathrm{sub}},-1) & Q(f_{\mathrm{sup}},+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\mathrm{sub}}e^{-\mathrm{j}\phi_{\mathrm{sub}}}\\ x_{\mathrm{sup}}e^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{sup}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}_s^+(k)\\ \dot{\boldsymbol{X}}_s^{-*}(k)\end{bmatrix} \tag{48}$$

改进后的 ERA 方法更适合应用于处理实际电力系统 SSO 参数的辨识，在 200 ms 的数据窗口条件下，其辨识精度明显优于现有 ERA。

3　仿真验证

为了验证所提出的基于系统特征实现算法的电网 SSO 参数辨识方法的正确性、可行性和实用性，分别利用合成和实际测量的 PMU 数据在 Matlab 软件上对算法进行了验证。

选择合成 PMU 数据是因其能全面覆盖不同频率范围和振荡特性，模拟复杂多变的电网运行状态和故障情况。通过精确设定振荡参数，可模拟各种 SSO 场景，从而系统地评估算法性能，确保其在实际应用中的正确性和有效性。

选择实际 PMU 数据是因其能直接反映电力系统实际动态特性，有助于准确评估算法应用可行性，并深入了解系统动态，有助于验证算法在实际场景中的实用性和可行性。

3.1　合成 PMU 数据的验证

利用式（1）作为生成模拟 PMU 数据的瞬时信号模型。首先，对模拟的 PMU 数据设置初始参数。设置系统的额定频率 $f_N=50$ Hz，基波分量的频率 f_0 的初始取值分别为 49.0、49.5、49.7、50.0、50.5、51.0、51.5 Hz；基波分量的其他参数设置为（x_0，ϕ_0）=（100，π/3）。次同步分量的初始参数设置为（f_{sub}，x_{sub}，ϕ_{sub}）=（20，20，π/2）；超同步分量的初始参数设置为（f_{sup}，x_{sup}，ϕ_{sup}）=（80，30，π/4）。

在验证过程中，瞬时数据的采样频率为 20 kHz，数据点数为 200。对采样的瞬时数据进行 DFT，得到合成 PMU 数据，其中合成 PMU 数据的上传频率为 100 Hz。在改进 ERA 的 SSO 参数辨识中，选取的数据窗口为 200 ms，即 21 个同步相量序列。对于现有 ERA 的 SSO 参数辨识则选取了 200 ms 和 1 s 的数据窗口，即 21 个同步相量序列和 101 个同步相

量序列。改进 ERA 与现有 ERA 在验证实验中的初始参数相同,仅数据窗口长度有区别。

依据文献[12],f_{sub} 和 x_{sub} 对 SSO 下同步相量参数辨识精度的影响最大。因此,使用控制变量的方法,分别让 f_{sub} 在[5,45]Hz 范围内以 1 Hz 间隔变化,x_{sub} 在[5,100]范围内以 1 为间隔变化。在上述条件下生成 PMU 数据后,基于改进 ERA 方法对合成 PMU 数据进行 SSO 参数辨识。同时,为评估改进算法在噪声影响下的 SSO 参数辨识精度,在瞬时信号模型式(1)中加入了零均值白噪声,PMU 数据的测量信噪比(signal-to-noise ratio,SNR)在 45 dB 左右,因此选取了 40 dB 作为仿真的噪声条件。利用改进 ERA 方法(简称 IERA)与现有 ERA 方法(简称 ERA)分别对 SSO 参数进行辨识,辨识结果列于表 1。将 3 种算法的辨识结果进行对比分析。

1)在理想条件下,改进 ERA 的参数辨识相对误差在 $10^{-13}\%$ ~ $10^{-11}\%$ 之间,接近于数据窗口为 1 s 的 ERA 的辨识结果。而取 200 ms 数据窗的 ERA 参数辨识的相对误差在 $10^{-12}\%$ ~ $10^{-8}\%$ 之间。比较可知,在 200 ms 数据窗下,改进 ERA 方法较于 ERA 方法展现出了更小的辨识误差。

2)在 40 dB 的白噪声条件下,200 ms 和 1 s 数据窗的 ERA 方法对 x_0 的辨识误差均在 5%左右,主要因为未考虑角频率 ω_1 和 ω_2 满足 $j\alpha$ 和 $-j\alpha$ 的共轭关系,因此导致基波参数辨识误差较大。改进 ERA 方法在 200 ms 的数据窗下可以将辨识结果的相对误差控制在 3.5%以下,接近于取 1 s 数据窗的 ERA 方法,且对参数 x_0 的辨识误差更小。然而,ERA 在 200 ms 数据窗下辨识结果的相对误差基本在 5%~10%之间,甚至对次同步分量的幅值 x_{sub} 的辨识相对误差超过了 12%。因此,可以证明在测量信噪比为 40 dB 时,改进 ERA 对 SSO 下同步相量参数的辨识结果比 ERA 更精确,验证了所提算法对辨识 SSO 下同步相量参数的正确性和可行性。

3.2 实际测量 PMU 数据的验证

为了进一步验证改进 ERA 辨识 SSO 下同步相量各参数的实用性,运用实际测量的 PMU 数据进行了仿真分析,该 PMU 数据是来自于华北电网一次 SSO 事件记录[2]。实际测量 PMU 数据的电流瞬时信号和同步相量的幅值分别如图 2 和图 3 所示。从图 2 和图 3 中可以观察到,所选取的 10 s 数据窗口作为实际测量 PMU 数据的仿真对象,展现出了非常快速的 SSO 变化。

所提出的改进 ERA 方法选取的数据窗口为 200 ms。同时,增设了以 2 s 为数据窗口的插值 DFT 算法,理论上该方法的辨识结果精确度较高。因此,将插值 DFT 算法在 2 s 数据窗口下的辨识结果作为评估其他算法辨识精度的参考基准。此外,

表 1 在理想条件和噪声条件下改进 ERA 与 ERA 辨识的相对误差 单位:%

仿真条件	SNR	方法	$\frac{\lvert\hat{f}_0-f_0\rvert}{f_0}$	$\frac{\lvert\hat{x}_0-x_0\rvert}{x_0}$	$\frac{\lvert\hat{f}_{sub}-f_{sub}\rvert}{f_{sub}}$	$\frac{\lvert\hat{x}_{sub}-x_{sub}\rvert}{x_{sub}}$	$\frac{\lvert\hat{\phi}_{sub}-\phi_{sub}\rvert}{\phi_{sub}}$	$\frac{\lvert\hat{x}_{sup}-x_{sup}\rvert}{x_{sup}}$	$\frac{\lvert\hat{\phi}_{sup}-\phi_{sup}\rvert}{\phi_{sup}}$
$f_{sub}\in[5,45]$Hz	∞	IERA 200 ms	10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}
		ERA 200 ms	10^{-9}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-9}
		ERA 1 s	10^{-11}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-11}
	40 dB	IERA 200 ms	0.188 9	0.761 9	0.061 6	2.915 4	2.047 7	2.127 5	3.484 3
		ERA 200 ms	0.647 9	5.582 4	0.096 1	8.015 5	3.327 0	7.724 0	5.736 0
		ERA 1 s	0.132 2	5.857 5	0.005 6	1.355 8	1.571 7	2.995 7	1.807 4
$x_{sub}\in[5,100]$	∞	IERA 200 ms	10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-11}
		ERA 200 ms	10^{-10}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}
		ERA 1 s	10^{-12}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-11}
	40 dB	IERA 200 ms	0.011 4	0.056 1	0.022 9	0.318 0	0.827 5	0.263 0	0.453 3
		ERA 200 ms	0.748 4	5.362 1	0.032 3	12.326 4	8.887 5	6.909 8	6.273 4
		ERA 1 s	0.172 9	4.550 2	0.003 4	1.646 5	0.452 7	0.891 1	0.608 8

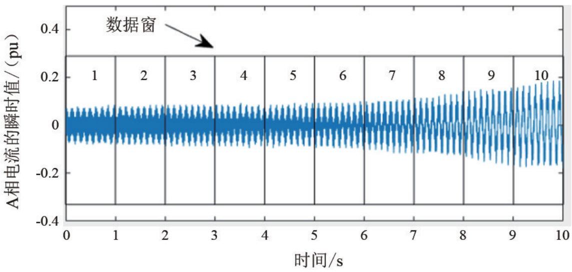

图 2　用于实际测量 PMU 数据的瞬时数据

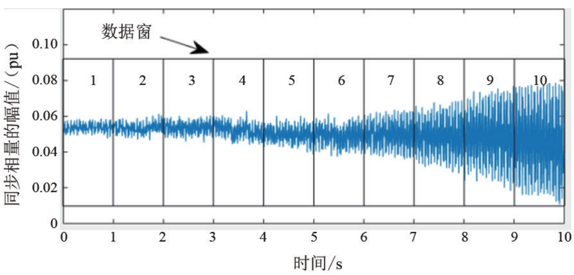

图 3　用于实际测量 PMU 数据的同步相量

还使用数据窗口长度分别为 1 s 和 200 ms 的 ERA 方法进行 SSO 参数辨识。

3 种方法对 SSO 下同步相量参数的辨识结果如图 4 所示。由于 3 种方法得到的基波分量的辨识结果差别不大,为节省篇幅,仅对振荡分量的辨识结果进行了详细介绍。另外,次同步分量和超同步分量是一对耦合分量,超同步分量辨识结果的精确性可以近似地用次同步分量的辨识结果表示,因此也省略了超同步分量的辨识结果。

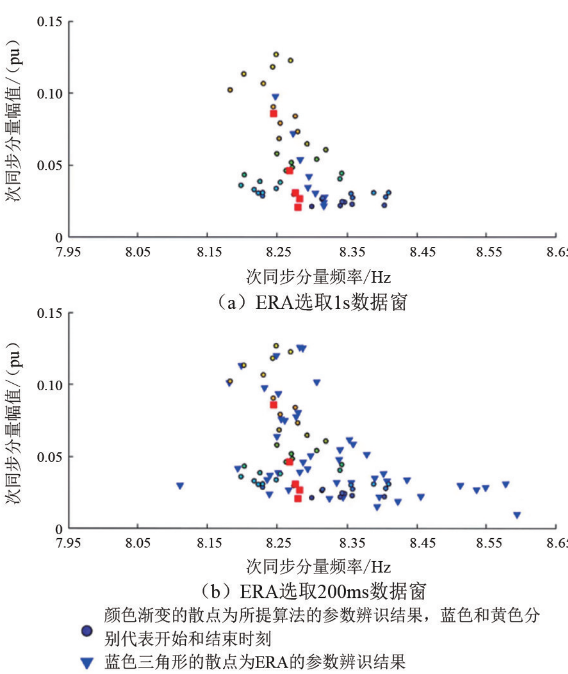

图 4　对实际测量 PMU 数据的次同步分量频率和幅值的辨识结果

从图 4(a)中可以看出 3 种方法的识别结果相差不大。理论上,数据窗口越长,提取的信息量越多,辨识结果越准确,但实时性越差。ERA 和插值 DFT 算法的数据窗口长度分别为 1 s 和 2 s,而改进 ERA 只需 200 ms 的数据窗口即可得到精度与之相差不大的辨识结果。通过使用 200 ms 的超短数据窗口,改进 ERA 实现了对电网 SSO 的动态监测。

从图 4(b)中可以看出:在 200 ms 的数据窗口中,ERA 的辨识结果与插值 DFT 和改进 ERA 的辨识结果差别很大,改进 ERA 对频率 f_{sub} 的辨识结果集中在 8.18~8.40 Hz 之间,而 ERA 辨识结果最小的为 8.11 Hz、最大的接近 8.60 Hz 且有 5 次超过 8.50 Hz,这与插值 DFT 的辨识结果严重背离;3 种方法的 x_{sub} 识别结果差异不大。此外,200 ms 的数据窗口比 2 s 的数据窗口缩短了 90%,改进 ERA 更能反映 SSO 的实时特性。

4　结　论

上面利用 ERA 易于求解、计算量小、抗噪声能力强等优点,提出了一种改进的基于 ERA 的 SSO 参数辨识方法,实现了对电力系统 SSO 的动态实时监测。经过改进后的 ERA 通过引入实数汉克尔矩阵并证明构造过程的可行性,解决了角频率的共轭约束问题,使得参数辨识结果更加精确和可靠。该算法可以在 200 ms 的超短数据窗口下得到精确的参数辨识结果,增强了其在电力系统 SSO 分析中的应用价值。通过合成和实际测量的 PMU 数据对改进 ERA 方法进行了验证研究,结果表明:与 ERA 相比,改进 ERA 在 200 ms 的数据窗口下可以更准确地辨识参数,实现了对电力系统 SSO 的动态监测。

然而,改进 ERA 也存在一定的局限性。这种局限性是所有辨识方法普遍面临的挑战,即对于过于发散的信号处理能力有限。但所提出的算法通过缩短数据窗口的方式在最大程度上减少了信号发散对参数辨识结果的影响,实际上,改进 ERA 算法选取 200 ms 数据窗口,已经能够有效解决实际应用中大部分快速变化的振荡问题。

参考文献

[1]　毕天姝,孔永乐,肖仕武,等.大规模风电外送中的次同步振荡问题[J].电力科学与技术学报,2012,27(1):10-15.

(下转第 17 页)

技术，2022，48(11)：4362-4373.
[6] 袁浩，王琰，倪益民，等. 高压线路保护非全相运行状态下的考虑[J]. 电力系统自动化，2010，34(20)：103-107.
[7] 郝奕华，陈朝晖，何进锋，等. 非全相运行对线路零序电流保护的影响分析[J]. 电力系统保护与控制，2022，50(18)：10-17.
[8] 魏曜，薛明军. 一种适用于高压线路非全相运行时的距离保护振荡闭锁的开放方案[J]. 电力系统保护与控制，2016，44(19)：70-75.
[9] 卫琳，张健康，粟小华，等. 大型发电机组非全相保护存在问题及对策[J]. 电网技术，2020，44(6)：2336-2342.
[10] 朱子娇，杨涛，王慧芳，等. 发电厂非全相运行电气量计算方法及保护方案[J]. 电力系统及其自动化学报，2018，30(10)：97-103.
[11] 贺儒飞，李荷婷. 发电机机端断路器非全相保护新型判据的研究[J]. 电力系统保护与控制，2018，46(17)：165-170.
[12] 王婷，李凤婷，王宾，等. 风电场送出线非全相运行潜供特性[J]. 电力自动化设备，2016，36(2)：169-174.
[13] 王月林，李凤婷，王洪涛，等. 基于风电联络线恢复电压的自适应单相重合闸[J]. 电测与仪表，2017，54(7)：69-74.
[14] 杨大业，项祖涛，马世英，等. 新能源接入系统暂态过电压产生机理及主要影响因素[J]. 电力电容器与无功补偿，2022，43(3)：127-134.
[15] 徐潜，王彤，王增平.计及锁相环和电流内环暂态过程的逆变型电源故障电流解析方法[J].电网技术，2024,48(6)：2603-2612.
[16] FANG Y, JIA K, YANG Z, et al. Impact of inverter-interfaced renewable energy generators on distance protection and an improved scheme[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(9)：7078-7088.
[17] 李红，粟时平，唐铭泽，等. 不对称故障下考虑电压跌落程度的新能源逆变器控制策略[J]. 电力系统保护与控制，2023，51(1)：21-32.
[18] 国家电力调度控制中心. 线路保护及辅助装置标准化设计规范：Q/GDW 1161—2014[S].北京：中国电力出版社,2014:8-9.

作者简介：

罗易萍(1995)，女，博士，工程师，研究方向为新型电力系统保护与控制、交直流混联电网保护与控制；

张永杰(1995)，男，博士，工程师，研究方向为电力系统规划及配电网保护；

周文越(1989)男，硕士，高级工程师，从事电力系统继电保护相关工作。

(收稿日期：2024-07-12)

(上接第 9 页)

[2] WANG Liang, XIE Xiaorong, JIANG Qirong, et al. Investigation of SSR in practical DFIG-based wind farms connected to a series-compensated power system[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(5)：2772-2779.
[3] KHALILINIA H, VENKATASUBRAMANIAN V. Subsynchronous resonance monitoring using ambient high speed sensor data[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(2)：1073-1083.
[4] NETTO M, MILI L. A robust Prony method for power system electromechanical modes identification[C]// 2017 IEEE Power and Energy Society General Meeting, July 16-20,2017,Chicago,USA. IEEE, 2017.
[5] ZHANG Fang, CHENG Lin, GAO Wenzhong, et al. Synchrophasors-based identification for subsynchronous oscillations in power systems[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2019, 10(2)：2224-2233.
[6] ZHANG Fang, LI Jiaxin, LIU Jun, et al. An improved interpolated DFT-based parameter identification for sub-/super-synchronous oscillations with synchrophasors[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2023, 38(2)：1714-1727.
[7] 马钺,蔡东升,黄琦.基于 Rife-Vincent 窗和同步相量测量数据的风电次同步振荡参数辨识[J].中国电机工程学报,2021,41(3)：790-803.
[8] 王杨,晁苗苗,谢小荣,等.基于同步相量数据的次同步振荡参数辨识与实测验证[J].中国电机工程学报,2022,42(3)：899-909.
[9] JUANG J N, PAPPA R S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1985, 8(5)：620-627.
[10] WANG Yang, JIANG Xiaolong, XIE Xiaolong, et al. Identifying sources of subsynchronous resonance using wide-area phasor measurements[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2021, 36(5)：3242-3254.
[11] ZHANG Xiaoxue, ZHANG Fang, GAO Wenzhong, et al. Improved subsynchronous oscillation parameter identification with synchrophasor based on matrix pencil method in power systems[J]. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 2024,12(1)：22-33.
[12] 张放,刘军,李佳欣,等.基于同步相量轨迹拟合的电力系统次同步/超同步振荡的实时参数辨识[J].中国电机工程学报,2023,43(4)：1413-1426.

作者简介：

曾雪洋(1992)，博士，高级工程师，从事电力系统稳定与控制、抽水蓄能和新能源并网控制、直流输电的研究工作。

(收稿日期：2024-06-18)