

# 基于 apFFT 和带约束条件的最小二乘拟合的 间谐波检测算法

王天行, 舒 勤

(四川大学电气工程学院, 四川 成都 610065)

**摘要:**在非整周期采样的情况下,使用传统的快速傅里叶变换(FFT)对邻近基波/谐波的密集谱间谐波进行参数估计时,由于频谱泄露的影响,间谐波检测误差较大,甚至难以判断密集谱的存在,因此,文中提出了一种基于全相位FFT和带约束条件的最小二乘拟合的间谐波检测算法。该算法的原理是先利用全相位FFT对间谐波参数进行预估,在预估参数的基础上构造拟合函数并设置约束方式,然后使用最小二乘拟合对间谐波参数进行校正。通过对比不同约束方式的效果,选择对幅值和相位分别进行约束为最佳约束方式。仿真实验表明,与其他基于FFT的算法相比,该算法可以有效地减少间谐波参数检测误差并具有良好的抗噪性。

**关键词:**全相位FFT;间谐波;最小二乘拟合;不等式约束

**中图分类号:**TM 933.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1003-6954(2023)02-0076-08

**DOI:**10.16527/j.issn.1003-6954.20230213

## Inter-harmonic Detection Algorithm Based on apFFT and Least Square Fitting with Constraints

WANG Tianxing, SHU Qin

(College of Electrical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, Sichuan, China)

**Abstract:**In the case of non-integer period sampling, when using traditional fast Fourier transform (FFT) for parameter estimation of dense spectral inter-harmonics adjacent to the fundamental/harmonic, the inter-harmonic detection error is relatively high due to the influence of spectral leakage, and it is even difficult to judge the existence of dense spectrum. Therefore, an inter-harmonic detection algorithm based on all-phase fast Fourier transform (apFFT) and least square fitting with constraints is proposed. The principle of the proposed algorithm is to first estimate the inter-harmonic parameters by using the apFFT, construct a fitting function and set constraints on the basis of the pre-estimated parameters, and then use the least square fitting to correct the inter-harmonic parameters. By comparing the effects of different constraint methods, the best constraint method is selected to constrain the amplitude and phase respectively. Simulation experiments show that, compared with other FFT-based algorithms, the proposed algorithm can effectively reduce the detection error of inter-harmonic parameters and has good noise immunity.

**Key words:**apFFT; inter-harmonics; least squares fit; inequality constraints

## 0 引 言

电能是人类社会使用最广泛、最重要的能源之一。随着科学技术的进步以及社会的发展,人们对输电线路和电力系统的稳定性、可靠性有了越来越高的要求。但是随着近年来大力发展风电、光伏等新能源,以及越来越多非线性负载被接入电力系

统<sup>[1-2]</sup>,电力系统的谐波和间谐波问题变得日益严重。大量的谐波和间谐波极大地危害着电力系统的安全和稳定。谐波和间谐波会造成继电保护装置和精密控制设备不正常动作,影响各种计量仪器的准确度,干扰电力通信,导致电压闪变,甚至损坏电子设备等<sup>[3]</sup>。

目前,用于检测电网中谐波、间谐波的方法主要有快速傅里叶变换法(fast Fourier transform,

FFT)<sup>[4]</sup>、小波变换法<sup>[5]</sup>、独立分量分析法<sup>[6]</sup> (independent component analysis, ICA)、神经网络法<sup>[7]</sup>等。快速傅里叶变换法是使用最广泛、最可靠的方法之一,但在非同步采样的情况下会引起频谱泄露和栅栏效应。小波变换法的优点是可以同时拥有较高的时域和频域分辨率,但可能引起小波混叠,降低稳定性。独立分量分析法常常做不到彻底分离各个分量且运算量较大。基于神经网络方法需要大量训练样本和极大的运算量。

相较于传统的快速傅里叶变换法,全相位傅里叶变换法(all-phase FFT, apFFT)先对数据进行预处理,然后再进行 FFT 变换。在抗噪性和抑制频谱泄露方面相对于传统的 FFT 方法有较大的优势<sup>[8]</sup>,且具有“相位不变性”,即谱线图中各条谱线的相位值与频率偏离值无关。不过普通的 apFFT 的抗噪性能有限<sup>[9]</sup>,因此下面采用 apFFT 谱分析得到粗略估计的信号参数,再利用最小二乘法原理构造拟合信号对原信号进行拟合得到信号参数的准确值。通过仿真实验,证明所提算法能在较低信噪比和邻近基波/谐波的情况下准确地减少间谐波参数的检测误差。

## 1 apFFT 的算法原理

### 1.1 apFFT 的数据预处理

全相位先对数据进行预处理得到全相位数据,再进行 FFT 变换。设对原始信号进行离散采样得到的  $N$  点离散序列为  $x(n)$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ), 保留  $x(0)$  前面的  $N-1$  个数据用于加权,则可以构造一个矩阵如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [x(0), x(1), \dots, x(N-1)] \\ \mathbf{x}_1 &= [x(-1), x(0), \dots, x(N-2)] \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_i &= [x(-i) \dots x(0), \dots, x(N-(i+1))] \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{N-1} &= [x(-N+1), x(-N+2), \dots, x(0)] \end{aligned} \quad (1)$$

再对每个向量向左进行循环移位,使  $x(0)$  处于第一位,可以得到一个新的矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_0 &= [x(0), x(1), \dots, x(N-1)] \\ \mathbf{x}'_1 &= [x(0), \dots, x(N-2), x(-1)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_i &= [x(0), \dots, x(N-(i+1)), x(-i), \dots, x(-1)] \\ &\vdots \\ \mathbf{x}'_{N-1} &= [x(0), x(-N+1), \dots, x(-1)] \end{aligned} \quad (2)$$

把式(2)的  $N$  行向量全部相加求平均值即可得到  $N$  点全相位数据向量。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ap}}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{x}'_i = \\ &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} N x(0), (N-1)x(1) + x(-N+1), \dots, \\ x(N-1) + (N-1)x(-1) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3)$$

对全相位数据向量进行 FFT 变换即可得到全相位 FFT。

### 1.2 apFFT 的频谱分析原理

对于采样得到的  $N$  点离散单频复指数信号为

$$x(n) = A_0 e^{j(2\pi f_0 n + \varphi_0)} \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (4)$$

式中:  $A_0$  为信号幅值;  $f_0$  为信号频率;  $\varphi_0$  为信号初相位。

令角频率  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , 并用频率间隔  $\Delta\omega = 2\pi/N$  的  $\beta$  倍表示  $\omega_0$ , 即  $\omega_0 = \beta \cdot \Delta\omega$ , 代入式(4)得到

$$x(n) = A_0 e^{j(\frac{n\beta 2\pi}{N} + \varphi_0)} \quad (5)$$

式中,  $\beta$  可以为小数。则序列  $x(n)$  的不加窗傅里叶变换谱为

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_0 e^{j(\frac{n\beta 2\pi}{N} + \varphi_0)} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \\ &= \frac{A_0}{N} e^{j\varphi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(\beta-k)n}{N}} = \frac{A_0}{N} e^{j\varphi_0} \frac{1 - e^{j2\pi(\beta-k)}}{1 - e^{j2\pi(\beta-k)/N}} = \\ &= \frac{A_0}{N} e^{j\varphi_0} \frac{e^{-j\pi(\beta-k)} - e^{j\pi(\beta-k)}}{e^{-j\pi(\beta-k)/N} - e^{j\pi(\beta-k)/N}} \frac{e^{j\pi(\beta-k)}}{e^{\frac{j\pi(\beta-k)}{N}}} \end{aligned} \quad (6)$$

经变换得

$$X(k) = \frac{A_0}{N} \frac{\sin[\pi(\beta-k)]}{\sin\left[\frac{\pi(\beta-k)}{N}\right]} e^{j\left[\varphi_0 + \frac{N-1}{N}(\beta-k)\pi\right]} \quad (7)$$

式中,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。

根据离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)的移位性质,式(1)中  $\mathbf{x}_i$  的 DFT 变换  $X_i(k)$  与式(2)中  $\mathbf{x}'_i$  的 DFT 变换  $X'_i(k)$  的关系为

$$X'_i(k) = X_i(k) e^{j\frac{2\pi ik}{N}} \quad (i, k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (8)$$

结合式(3)和式(7),同时结合式(8)的性质可以得到全相位傅里叶变换谱。

$$\begin{aligned} X_{\text{ap}}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X'_i(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i(k) e^{j\frac{2\pi ik}{N}} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-i) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\frac{2\pi ki}{N}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_0}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\varphi_0} e^{\frac{j2\pi(n-i)\beta}{N}} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\frac{2\pi ki}{N}} = \\ & \frac{A_0}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(\beta-k)}{N}i} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(\beta-k)n}{N}} = \\ & \frac{A_0}{N^2} \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi(\beta-k)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi(\beta-k)}{N}}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(\beta-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi(\beta-k)}{N}}} = \\ & \frac{A_0}{N^2} \cdot \frac{\sin^2[\pi(\beta-k)]}{\sin^2[\pi(\beta-k)/N]} \quad (9) \end{aligned}$$

通过比较式(7)和式(9)可以得出:傅里叶变换谱各条谱线所对应的相位值为  $\varphi_0 + \frac{N-1}{N}(\beta-k)\pi$ , 与频率偏离值  $(\beta-k)$  有关; 而全相位傅里叶变换谱各条谱线所对应的相位值为  $\varphi_0$ , 就是真实初相位, 与频率偏离值无关。这就是“相位不变性”, 这使得 apFFT 的相位检测拥有很高的精度, 因为不会受到频谱泄露的影响。而且 apFFT 的谱线值是二次方的, 因此旁瓣衰减快, 主瓣更加突出, 能显著减少频谱泄露。

设峰值谱线为  $k_p$ , 由式(7)和式(9)可以得到

$$\rho = \arg X(k_p) - \arg X_{ap}(k_p) = \frac{N-1}{N}(\beta - k_p)\pi \quad (10)$$

因此有

$$\beta = k_p + \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{N}{N-1} \quad (11)$$

所以谱线  $k_p$  所对应的频率  $f_0$  和角频率  $\omega_0$  满足

$$\begin{cases} \omega_0 = \beta \cdot \Delta\omega \\ f_0 = \omega_0/2\pi \end{cases} \quad (12)$$

### 1.3 幅值和相位检测

在获得频率校正值  $\beta$  的情况下, 幅值  $A_0$  可以由式(8)直接求出。峰值谱线  $k_p$  所对应的谱线值为

$$|X_{ap}(k_p)| = \frac{A_0}{N^2} \frac{\sin^2[\pi(\beta - k)]}{\sin^2[\pi(\beta - k)/N]} \quad (13)$$

因此

$$A_0 = |X_{ap}(k_p)| \cdot \frac{\sin^2[\pi(\beta - k)/N]}{\sin^2[\pi(\beta - k)]} \cdot N^2 \quad (14)$$

根据 apFFT 相位不变性, 可以直接用峰值谱线  $k_p$  对应的相位作为信号初始相位  $\varphi_0$ 。

### 1.4 密集谱识别

设单频信号分别为:

$$x_1(n) = 5e^{j\left(\frac{f_1}{2\pi}n + 30\right)}$$

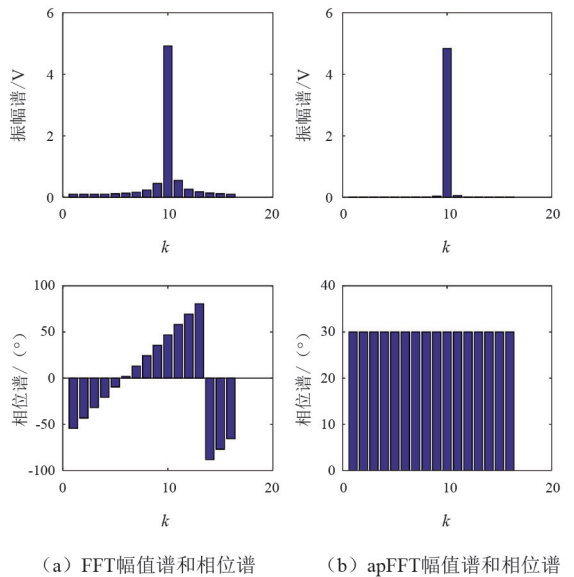
$$x_2(n) = 2e^{j\left(\frac{f_2}{2\pi}n + 20\right)} \quad (15)$$

复合信号为

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (16)$$

式中:  $f_1 = 50.5$  Hz;  $f_2 = 53.0$  Hz; 采样点数  $N = 16$ ; 采样频率  $f_s = 80.0$  Hz。则可以求出频率分辨率的值为  $\Delta f = f_s/N = 5.0$  Hz, 由于  $|f_1 - f_2| = 2.5$  Hz  $< \Delta f$ , 因此复合信号  $x(n)$  属于密集谱分布。

$x_1(n)$  的 FFT 幅值谱和相位谱、apFFT 幅值谱和相位谱如图 1 所示。图中  $k$  均为谱线号, 谱线只出现在频率分辨率整数倍的频率处。



(a) FFT幅值谱和相位谱 (b) apFFT幅值谱和相位谱

图 1  $x_1(n)$  的 FFT 和 apFFT 对应的幅值谱和相位谱

对比图 1(a) 和图 1(b) 可以发现: apFFT 有效地抑制了频谱泄露, 主谱线更加突出; 而且其相位谱在任何谱线值处都等于实际的初相位  $30^\circ$ , 即“平坦性”。

分别对  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x(n)$  进行 apFFT 变换, 画出幅值谱和相位谱, 如图 2 所示。图 2(a)、图 2(b)、图 2(c) 分别对应信号  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x(n)$ 。由图可见单频信号的 apFFT 相位谱呈明显的“平坦性”。图 2(c) 是混合信号, 峰谱线值  $k_p = 10$ , 判断邻近谱线 9 和谱线 11 处是否存在密集谱的依据就是峰谱线值对应的相位谱附近是否具有“平坦性”。由图 2 所示  $k$  为 9、10、11 处的相位谱波动较大, 由此可以判断存在密集谱。而如果直接观察幅值谱很难判断密集谱的存在。

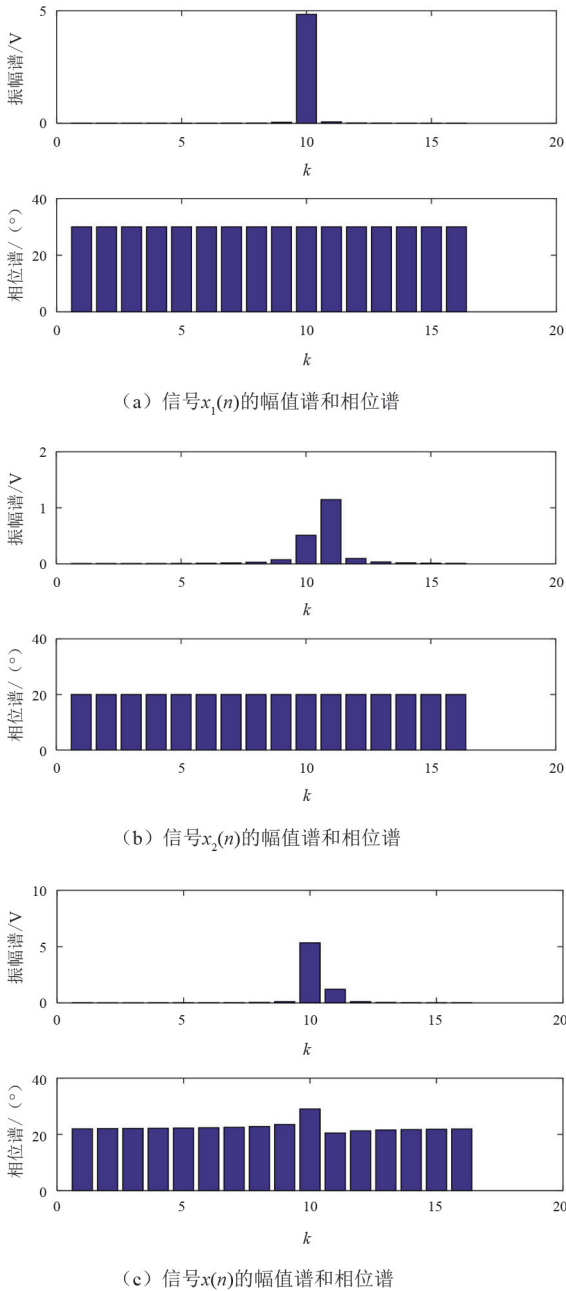


图2 经过 apFFT 变换的幅值谱和相位谱

## 2 幅值和相位的拟合修正

尽管 apFFT 理论上可以极大地减小频谱泄露对谱线的干扰,但在实际使用中,噪声的影响依旧是不可忽略的。在噪声干扰下,apFFT 对幅值和相位检测的误差较大。

减弱噪声的影响可以有多种方式,比如小波去噪<sup>[11]</sup>、经验模态分解(empirical mode decomposition, EMD)去噪<sup>[12]</sup>、奇异值分解(singular value decomposition, SVD)去噪<sup>[13]</sup>等,但是这些方法很容易把有用

信号一起消除,而且存在去噪不彻底的情况。另一种手段是谱线插值,但是谱线插值法会增加运算量,而且常用的三谱线插值法常常引入更多噪声干扰。因此采用拟合法对所得到的测量结果进行二次校正。

对于含有多个频率的复指数信号

$$x(t) = \sum A_i e^{j(2\pi f_i t + \varphi_i)} \quad (17)$$

式中: $A_i$ 、 $f_i$ 、 $\varphi_i$  分别为幅值、频率、初相位; $t$  为时间。

先对原始信号进行 apFFT 变换得到全相位谱线图,通过搜寻谱峰以及密集谱判别可以判断出有用的频率个数,设为  $M$ ;令拟合函数为

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^M a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) \quad (18)$$

式中, $a_i$ 、 $b_i$ 、 $c_i$  为待解参数,分别对应幅值、频率、初相位。令误差平方和为  $J$ ,表达式为

$$\begin{cases} J = \sum_{t=t_1}^{t_N} [\delta(t) - x_{\text{real}}(t)]^2 \\ x_{\text{real}}(t) = \text{Re } x(t) = \sum A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) \end{cases} \quad (19)$$

式中: $x(t)$  为复指数信号; $\delta(t)$  为实信号。所以  $J$  也得用  $x(t)$  的实部  $x_{\text{real}}(t)$  与  $\delta(t)$  做运算。

由此可知

$$J = J(a_1 a_2 \cdots a_M, b_1 b_2 \cdots b_M, c_1 c_2 \cdots c_M)$$

根据最小二乘法的原理<sup>[14]</sup>,当  $J$  最小时的参数 ( $a_1 a_2 \cdots a_M, b_1 b_2 \cdots b_M, c_1 c_2 \cdots c_M$ ) 即所求值。根据多元微分法,当  $J$  在各参数上的偏导数为 0 时可以取到最小值。

由式(17)一式(19)可得式(20)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_k} &= \sum_{t=t(1)}^{t(N)} 2 [\delta(t) - x_{\text{real}}(t)] \cdot \left[ \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) + \right. \\ &\quad \left. \cos(2\pi b_k t + c_k) + \sum_{i=k+1}^M a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) - x_{\text{real}}(t) \right] = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b_k} &= \sum_{t=t(1)}^{t(N)} 2 [\delta(t) - x_{\text{real}}(t)] \cdot \left[ \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) - \right. \\ &\quad \left. a_k \sin(2\pi b_k t + c_k) 2\pi t + \sum_{i=k+1}^M a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) - x_{\text{real}}(t) \right] = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_k} &= \sum_{t=t(1)}^{t(N)} 2 [\delta(t) - x_{\text{real}}(t)] \cdot \left[ \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) - \right. \\ &\quad \left. a_k \sin(2\pi b_k t + c_k) + \sum_{i=k+1}^M a_i \cos(2\pi b_i t + c_i) - x_{\text{real}}(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

且对  $k=(1,2,\dots,M)$  均成立,解这个线性方程组可以得到  $3M$  个参数的估计值。但是这样直接求一个  $3M$  元方程组是极其复杂的,因此需要简化。由于 apFFT 方法对于频率已经有了很高的检测精确度,所以拟合函数  $\delta(t)$  中的参数  $b_i$  可以直接使用 apFFT 方法求出的频率值,记为  $f_i$ ,即  $b_i=f_i$ 。这样  $J=J(a_1 a_2 \cdots a_M, c_1 c_2 \cdots c_M)$  就仅仅是  $a_i$  和  $c_i$  的函数。考虑到 apFFT 方法在噪声下对幅值和相位的检测相对误差不会超过 5%,所以设置不等式约束条件为

$$\begin{cases} 0.95A_i < a_i < 1.05A_i \\ 0.95\varphi_i < c_i < 1.05\varphi_i \end{cases} \quad (21)$$

式中,  $A_i$  和  $\varphi_i$  分别为直接使用 apFFT 方法求出的幅值和相位值。拟合函数  $\delta(t)$  可以表示为线性形式。

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^M (a_{hi} \cos 2\pi f_i t + b_{hi} \sin 2\pi f_i t) \quad (22)$$

式中,  $a_{hi}=a_i \cos c_i$ ,  $b_{hi}=-a_i \sin c_i$ ,也可以写为矩阵形式,如式(23)所示。

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\delta(t_1) \ \delta(t_2) \ \cdots \ \delta(t_N)]^T \\ \mathbf{I} &= [a_{h1}b_{h1} \ a_{h2}b_{h2} \ \cdots \ a_{hM}b_{hM}]^T \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \cos 2\pi b_1 t_1 & \sin 2\pi b_1 t_1 & \cdots & \sin 2\pi b_M t_1 \\ \cos 2\pi b_1 t_2 & \sin 2\pi b_1 t_2 & \cdots & \sin 2\pi b_M t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\pi b_1 t_N & \sin 2\pi b_1 t_N & \cdots & \sin 2\pi b_M t_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{X}$  为  $N \times 1$  维矩阵;  $\mathbf{I}$  为  $2M \times 1$  维矩阵;  $\mathbf{F}$  为  $N \times 2M$  维矩阵;  $t_1$  至  $t_N$  表示  $N$  点的离散采样时间序列。

由最小二乘法的线性法则对  $\mathbf{I}$  进行预估有

$$\mathbf{I} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{X} \quad (24)$$

由式(22)和式(23)可得

$$\begin{cases} a_i = \sqrt{a_{hi}^2 + b_{hi}^2} \\ c_i = \arctan \frac{b_{hi}}{a_{hi}} \end{cases} \quad (25)$$

当满足约束条件式(21)时,  $a_i$  和  $c_i$  即为最终所得的幅值和相位值。

不过直接进行带约束条件的拟合很容易造成“过拟合”现象<sup>[15]</sup>。过拟合的定义为:所得到的拟合函数能在训练数据集上获得最佳拟合,却在训练数据集外无法很好地拟合数据。造成过拟合现象的原因主要有:

- 1) 样本量太少;
- 2) 样本噪声干扰过大;
- 3) 假设的数学模型不合理,或者模型无法实际存在;

4) 模型过于复杂,或者约束条件过于严苛。

对于多频率信号,其数学模型是很简明的,经过密集谱判定后得到的模型也是符合实际的,因此在足够样本量以及噪声干扰不过于强烈的情况下,可以从约束条件方面对拟合法进行改善。

先只对  $a_i$  设置约束,对  $c_i$  不设置约束,  $b_i$  仍然直接使用求出的频率值  $f_i$ ,即

$$\begin{cases} \min J = \sum_{t=t_1}^{t_N} \left[ \sum_{i=1}^M a_i \cos(2\pi f_i t + c_i) - x_{\text{real}}(t) \right]^2 \\ 0.95A_i < a_i < 1.05A_i \end{cases} \quad (26)$$

求出  $(a_1 a_2 \cdots a_M)$  即为校正后的幅值,然后再单独对  $c_i$  设置约束并进行拟合。

$$\begin{cases} \min J = \sum_{t=t_1}^{t_N} \left[ \sum_{i=1}^M a_i \cos(2\pi f_i t + c_i) - x_{\text{real}}(t) \right]^2 \\ 0.95\varphi_i < c_i < 1.05\varphi_i \end{cases} \quad (27)$$

求出  $(c_1 c_2 \cdots c_M)$  即为校正后的相位值。

### 3 算法仿真及结果比较

#### 3.1 对密集谱判定以及拟合方法有效性的仿真实验验证

仿真信号采用的模型为

$$x(n) = \sum_{i=1}^7 A_i e^{j(2\pi \frac{f_i}{f_s} n + \varphi_i)} \quad (28)$$

式中:  $A_i$  为信号幅值;  $f_i$  为信号频率;  $\varphi_i$  为信号初相位。各信号分量具体参数见表格 1,其中  $n=0, \dots, N-1$ , 采样频率  $f_s=5120$  Hz。根据 IEC 检测标准,应当使频率分辨率为 5 Hz,因此  $N=1024$ 。为了得到全相位谱,实际检测中需要保留采样数据  $x(0)$  的前  $N-1$  项用于全相位预处理。

信号的全相位幅值和相位谱如图 3 所示。由图 3 可以初步确定峰值谱线  $k_p=[5 \ 10 \ 13 \ 20]$ ,谱线 9、11、19 存疑;观察相位谱图可以发现  $k$  为 9、11、19 处所对应的相位谱与邻近的相位谱值相差较大,即不具备“平坦性”;因此可以判断为密集谱,即峰值



表 1 信号各分量参数

谐波类别	频率/Hz	幅值/V	相位/(°)
谐波	50.5	100	30
	101	44	70
	26	5	10
间谐波	48	7	20
	53	2	40
	66	3	50
	93	5	60

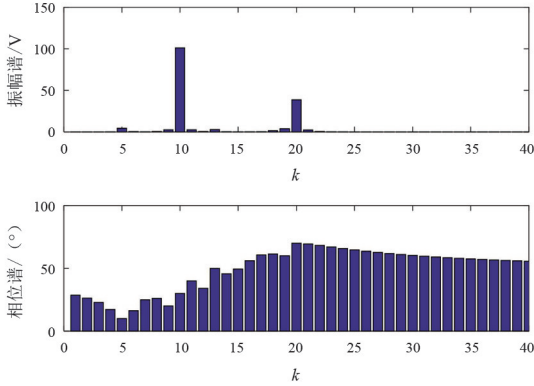


图 3 信号  $x(n)$  的全相位幅值谱和相位谱

谱线  $k_p = [5\ 9\ 10\ 11\ 13\ 19\ 20]$  共 7 条。先根据 apFFT 常规办法求出频率  $f_i$ 、幅值  $A_i$ 、相位  $\varphi_i$ ；频率值不需要校正,令拟合函数为  $\delta(t) = \sum_{i=1}^7 a_i \cos(2\pi f_i t + c_i)$ , 拟合同约定为  $\begin{cases} 0.95A_i < a_i < 1.05A_i \\ 0.95\varphi_i < c_i < 1.05\varphi_i \end{cases}$ 。比较 3 种不同的拟合方式,分别为:

1)同时对  $a_i$  和  $c_i$  进行约束并求出拟合结果  $a'_i, c'_i$ 。

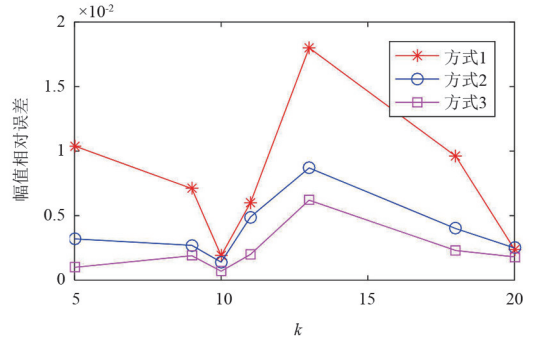
2)先只约束  $a_i$ ,即  $\begin{cases} 0.95A_i < a_i < 1.05A_i \\ c_i \in R \end{cases}$ , 求出拟合结果  $a'_i$ ;然后,再代入  $a'_i$  以及对  $c_i$  的约束进行二次拟合求解,即  $\begin{cases} a_i = a'_i \\ 0.95\varphi_i < c_i < 1.05\varphi_i \end{cases}$ , 求出拟合结果  $c'_i$ ;

3)先只约束  $a_i$ ,即  $\begin{cases} 0.95A_i < a_i < 1.05A_i \\ c_i \in R \end{cases}$ , 求出拟合结果  $a'_i$ ;然后,不代入求出的  $a'_i$ ,只对  $c_i$  进行约束求解,即  $\begin{cases} a_i \in R \\ 0.95\varphi_i < c_i < 1.05\varphi_i \end{cases}$ , 求出拟合结果  $c'_i$ 。

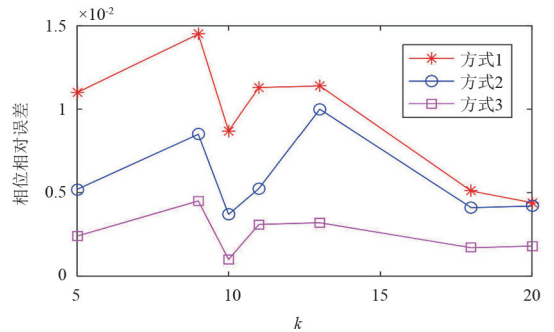
3 种拟合方式的相对误差比较结果如图 4 所示。由于 3 种拟合方式均固定频率取值,因此只观察幅值和相位检测结果的不同。

通过对对比可以发现:方式 1 无论对任何一个分量的检测准确度都不如另外两种方式;3 种方式均对谐波的检测有较高精度,这是因为谐波幅值较大;对于幅值较小的间谐波成分,方式 3 的检测效果最

好,这是因为最小二乘法拟合在实际应用中经常会出现“过拟合”的现象,方式 1 的约束条件过于严苛反而增大了误差,方式 2 虽然对幅值的检测误差较小,带入幅值的校正值会导致误差积累从而影响对相位值的校正,方式 3 在拟合过程中分别放宽了对相位和幅值的约束,从而有较高的准确度。因此采用效果最好的方式 3 作为最佳约束拟合方法对 apFFT 检测后的参数进行校正。



(a) 幅值相对误差



(b) 相位相对误差

图 4 固定频率的幅值和相位相对误差

### 3.2 不同检测方法的结果仿真对比

继续使用式(28)所示信号,下列各表分别在不添加噪声和信噪比 SNR = 20 dB 的情况下用 4 种算法对该信号进行间谐波参数估计并得到相对误差,表 6 中的  $10^{-12}$  是处于同一数量级的相对误差的简写。其中方法 1 为普通全相位法<sup>[16]</sup>,方法 2 为三谱线插值法<sup>[17]</sup>,方法 3 为谱线方程组法<sup>[18]</sup>,方法 4 为所提方法,即基于 apFFT 的约束拟合法。

表 2 间谐波频率检测相对误差对比(不添加噪声)

频率/Hz	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
26	0.000 6	0.059 3	0.010 9	0.000 6
48	0.001 4	0.016 9	0.007 7	0.001 4
53	0.003 4	0.014 9	0.008 5	0.003 4
66	0.001 9	0.017 3	0.017 1	0.001 9
93	0.002 0	0.003 6	0.002 3	0.002 0

表 3 间谐波频率检测相对误差对比 (SNR=20 dB)

频率/Hz	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
26	0.000 4	0.059 5	0.030 1	0.000 4
48	0.001 7	0.017 6	0.014 2	0.001 7
53	0.006 7	0.015 7	0.012 7	0.006 7
66	0.002 7	0.024 5	0.014 6	0.002 7
93	0.003 5	0.006 9	0.002 9	0.003 5

表 4 间谐波幅值检测相对误差对比 (不添加噪声)

幅值/V	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
5	0.006 0	0.048 5	0.022 1	0.003 6
7	0.003 6	0.021 3	0.021 0	0.003 0
2	0.011 1	0.053 1	0.011 1	0.010 5
3	0.021 2	0.254 8	0.019 0	0.007 2
5	0.018 1	0.019 7	0.010 7	0.005 2

表 5 间谐波幅值检测相对误差对比 (SNR=20 dB)

幅值/V	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
5	0.009 1	0.057 8	0.029 1	0.007 4
7	0.013 8	0.032 0	0.028 3	0.002 7
2	0.022 2	0.047 3	0.014 1	0.009 6
3	0.027 4	0.254 4	0.031 4	0.002 6
5	0.010 2	0.029 2	0.018 0	0.003 0

表 6 间谐波相位检测相对误差对比 (不添加噪声)

相位/(°)	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
10	$10^{-12}$	0.037 3	0.012 0	0.001 5
20	$10^{-12}$	0.046 4	0.017 3	0.009 5
40	$10^{-12}$	0.026 3	0.016 9	0.007 2
50	$10^{-12}$	0.014 5	0.025 1	0.005 4
60	$10^{-12}$	0.030 4	0.012 4	0.002 5

表 7 间谐波相位检测相对误差对比 (SNR=20 dB)

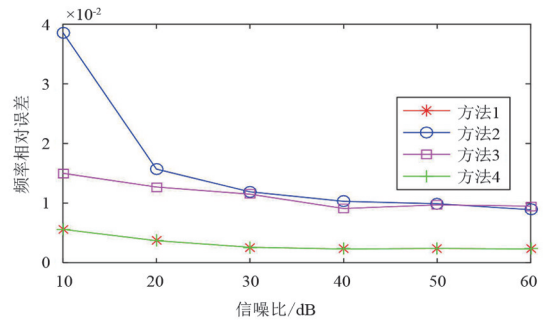
相位/(°)	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
10	0.002 2	0.036 5	0.024 8	0.005 2
20	0.015 3	0.050 3	0.018 7	0.007 5
40	0.010 4	0.048 9	0.023 7	0.007 9
50	0.017 5	0.031 5	0.021 2	0.007 4
60	0.010 5	0.038 2	0.016 2	0.005 9

通过表 2—表 7 的对比可以发现:在无噪声情况下,方法 1 对频率、幅值和相位的检测精度均显著高于方法 2 和方法 3,但是对幅值和相位的检测受噪声影响很大;方法 4 在传统 apFFT 方法基础上进行校正,克服了噪声对检测精度的影响,当信噪比为 20 dB 时,与方法 2 相比,所提算法对信号幅值和相位的检测相对误差均提升了 1~2 个数量级左右。这说明,相较于传统的 FFT 谱线法,apFFT 通过抑制

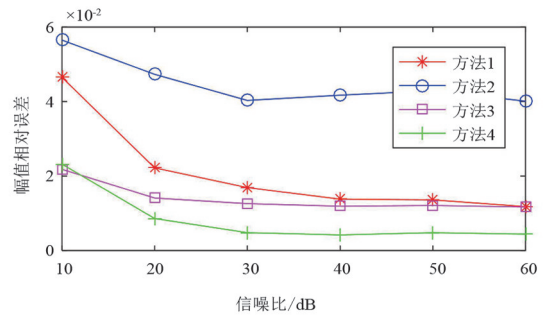
频谱泄露从而提升了对信号参数的检测精度;另一方面表明在 apFFT 基础上进行的幅值与相位的校正是有效的。

### 3.3 不同强度白噪声对检测结果的影响

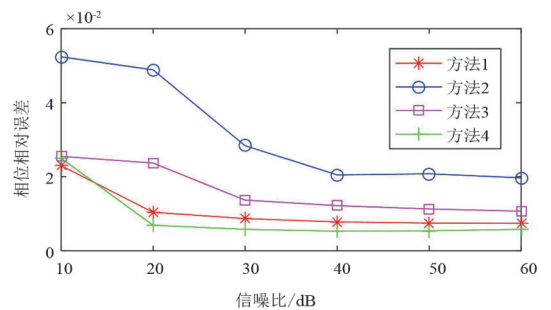
实际中的信号几乎都含有一定的噪声,因此算法的抗噪性也十分重要,以幅值为 2 的间谐波为例,通过对式(28)所示信号模型添加不同信噪比高斯白噪声进行仿真实验对比,结果如图 5 所示。



(a) 频率检测误差



(b) 幅值检测误差



(c) 相位检测误差

图 5 不同信噪比白噪声检测参数的误差

由图 5 可知:随着白噪声强度的增加,所提算法对于频率值检测的相对误差始终在小范围内波动;对于幅值和相位检测的相对误差波动大于频率检测的相对误差波动。在信噪比低于 20 dB 的情况下,所提算法对频率的检测精度比对幅值和相位的检测

精度高很多;当信噪比大于 30 dB,3 个参数的检测误差才基本上稳定在一个水平。但此算法相较于其他 3 种算法的检测精度依然是最高的,尤其是抗噪性更加出众,即使在噪声较强的情况下,所提算法依然能将相对误差控制在较低水平,检测精度优于其他 3 种算法。

## 4 结 论

当信号中的间谐波邻近基波或者某次谐波时,频谱泄露所带来的主瓣干扰会严重影响间谐波的检测精度和对密集谱的判断。传统的 apFFT 虽然可以有效抑制频谱泄露、减少主瓣干扰,但其抗噪性不足且对幅值的检测精度不高。因此上面先使用 apFFT 对间谐波参数进行检测,在此基础上使用带不等式约束的最小二乘法对间谐波参数进行校正。通过仿真分析证明,所提算法能够有效判断密集谱的存在,并且检测结果精度更高、抗噪性更强。不过拟合算法对于频率分量较多的信号运算量会比较大,这一点不利于实时检测,需要进一步改进。

虽然上面使用约束拟合算法对 apFFT 检测结果进行了校正,并比较了不同约束拟合方式结果的准确性,但是约束拟合方式很多,所研究的只是最具代表性的 3 种方式,不同的拟合方式会带来不同的结果,这一点值得深入研究。

### 参考文献

- [1] 刘芳,刘威,汪浩东,等.高比例新能源电力系统振荡机理及其分析方法研究综述[J].高电压技术,2022,48(1):95-113.
- [2] 张宏伟,张振东.大规模风电场并网系统次同步振荡研究综述[J].通信电源技术,2020,37(7):267-269.
- [3] 刘小林.IEC 标准中谐波与间谐波的检测与分析[D].苏州:苏州大学,2016.
- [4] SU Taixin, YANG Mingfa, JIN Tao, et al. Power harmonic and interharmonic detection method in renewable power based on Nuttall double-window all-phase FFT algorithm[J]. IET renewable power generation, 2018, 12(8):953-961.
- [5] FANG Guozhi, YANG Caishan, YANG Chao. Detection of inter-harmonic in power system based on Meyer wavelet and FFT[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(12):90-93.
- [6] BELOUCHRANI A, ABED-MERAİM K, CARDOSO J-F, et al. A blind source separation technique using second-order statistics[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(2):434-444.
- [7] 王小华,王莉,王力.基于神经网络的电力系统谐波及间谐波高精度检测[C]//第 29 届中国控制会议论文集.北京:中国自动化学会,2010:2334-2337.
- [8] 黄翔东.全相位数字信号处理[D].天津:天津大学,2006.
- [9] 黄翔东,王兆华.全相位 FFT 相位测量法的抗噪性能[J].数据采集与处理,2011,26(3):286-291.
- [10] 黄翔东,王兆华,罗蓬,等.全相位 FFT 密集谱识别与校正[J].电子学报,2011,39(1):172-177.
- [11] 林华伦,何小阳.基于小波去噪的加窗 FFT 电网谐波检测[J].计算技术与自动化,2012,31(4):76-79.
- [12] 鲁铁定,钱文龙,贺小星,等.一种削弱信噪混叠的 EMD 降噪方法[J].大地测量与地球动力学,2020,40(2):111-116.
- [13] 李伟,江晓林,陈海波,等.基于 EEMD\_Hankel\_SVD 的矿山微震信号降噪方法[J].煤炭学报,2018,43(7):1910-1917.
- [14] 孟玲玲,孙常栋,韩宝如.基于最小二乘法和独立分量分析的间谐波检测算法[J].电力系统保护与控制,2012,40(11):76-81.
- [15] 李蓓蕾.多次自适应最小二乘曲线拟合方法及其应用[D].荆州:长江大学,2014.
- [16] 王兆华,黄翔东,杨尉.全相位 FFT 相位测量法[J].世界科技研究与发展,2007,29(4):28-32.
- [17] 牛胜锁,梁志瑞,张建华,等.基于三谱线插值 FFT 的电力谐波分析算法[J].中国电机工程学报,2012,32(16):130-136.
- [18] 张金平,李建立,段晨.计及负频率影响的新能源发电低频间谐波检测方法[J].电测与仪表,2020,57(2):95-100.

### 作者简介:

王天行(1997),男,硕士研究生,研究方向为现代信号处理;

舒勤(1958),男,教授,博士生导师,研究方向为电能质量、电气工程通信与信号处理、复杂背景弱信号处理。

(收稿日期:2022-09-08)