

基于最大熵的多谐波源求和方法研究

陈晓静¹, 李楠²

(1. 重庆电力科学研究院, 重庆 400015; 2. 成都电业局调度局, 四川 成都 610021)

摘要:提出了一种处理电力系统中随机谐波矢量(电压和电流)求和问题的新方法。用随机矢量 X-Y 分量的各阶矩求和代替随机矢量求和运算,再用矩量平方换算给出矢量和的 $2n$ 阶矩。由最大熵原理仅需要矢量和的 4 阶矩就能很好地得到逼近求和概率密度函数 pdf(probability density function)。这种方法求和时不需要各个随机矢量在相位上具有 $0 \sim 2\pi$ 的概率分布,使用统计样本较少。最后对 2 个谐波电流矢量幅值的近似 pdf 和由实测值统计得到的 pdf 进行对比,证明了该方法的有效性。

关键词:谐波求和;非线性;最大熵

Abstract: A new method about random harmonic summation in power system is proposed. It is to use several order moments of X-Y component of random vectors to substitute the random vectors summation. And the $2n$ order moments of vectors summation is given by moments squares conversion. Using the maximum entropy could approximate the probability density function. The method could use less statistic samples and need no probability distribution of $0 \sim 2\pi$ about every random vector. At last the availability of the method is approved by the case.

Key words: harmonic summation; nonlinear; maximum entropy

中图分类号: TM732 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-6954(2009)-0050-04

近年来,由于半导体、电弧和电磁等类型的大量非线性负荷在民用、工业和商业中的广泛应用,使得电力系统配电网和输变电系统中产生了大量的谐波电流和谐波电压,给系统和用户造成了极大的危害。IEC(国际电工委员会)和国标都提出了以谐波的 95% 超值概率值(即超过 95% 概率值谐波电压或电流的大小)作为谐波估计标准。

谐波源具有时变特征,因此普遍采用概率统计的方法来对其产生的谐波电流或相应的谐波电压进行分析和估计。为了计算谐波的 95% 超值概率值,首先要求获得谐波分布的概率密度函数。传统采用 Monte-Carlo 方法计算概率密度函数^[2],但计算量大,计算所耗时间长。文献[3]总结了电力系统中常见的 3 种计算概率密度函数的方法,包括 Gram-Charlier(或者 Edgeworth)级数法、Pearson 法和 Johnson 法。Gram-Charlier 级数法假定分布是近似的正态分布, Pearson 法^[4]要求以一种特别的概率密度函数为基础,分布函数满足某一特定的微分形式,而 Johnson 法中,将给定的概率密度函数转换成另一种熟悉的形式,不同的转换函数可能带来不同的误差,转换函数的最优选择还有待进一步探讨。因此,它们在计算谐波分布概率密度函数和谐波的 95% 超值概率值时都还存在着一定的局限性。

电力系统不可能在所有节点位置安装谐波检测装置,通常对未测节点用随机矢量求和的方法进行评估,所以就提出了多谐波源求和问题。目前已做了一些涉及随机求和问题的研究工作。如文献[5]提出的随机变量求和方法以累积量法为基础采用高阶正交多项式逼近等效负荷曲线;文献[6]提出了随机相位概率分析法,将具有 $[0, 2\pi]$ 分布的随机矢量求和问题转化为随机变量求和问题;文献[7]使用 Laguerre 正交多项式逼近求和概率密度,通过随机矢量幅值和高阶(原点)矩给出多项式系数,但只局限于求解具有 $[0, 2\pi]$ 分布的随机矢量求和问题。现场测量结果证实大多数非线性负荷产生频次低于 11 次的谐波,且一般不具有 $[0, 2\pi]$ 分布,表现为小于 2π 的扇形分布或椭圆分布。对于相位分布小于 2π 的随机矢量求和问题,可采用 Monte-Carlo 模拟法^[6]或 Laguerre 多项式法^[9~11]。前者要求已知概率分布特征和大量的统计样本,但用计算机产生的伪随机数只能模拟特定的概率密度函数;后者主要考虑多项式只能展开有限项的截断误差和递推计算高阶矩带来的误差。

下面将利用最大熵原理拟合概率密度函数的特点,用样本较低次阶(原点)矩(4 阶)计算拉格朗日乘子;通过多随机矢量的 X、Y 正交分量的各阶矩求

和过程得到和矢量幅值(简称和值)的各阶矩,从而得到以最大熵方法为基础的和值概率密度函数,进而获得相应的 95%超值概率值。

1 基于最大熵原理概率密度函数确定

1.1 信息量和信息熵的概念

1948年, C. E. Shannon首次提出了信息熵的概念,把熵作为一个随机事件的不确定性或信息量的量度。设 X 是一随机独立变量, 它的概率密度函数为 $p(x)$, 定义 $I(x)$ 为单位幅值上的信息量。即

$$I(x) = \ln \frac{1}{p(x)} = -\ln p(x) \quad (1)$$

它是随机变量 X 取值不确定性的量度, 是另一种简单的概率量度。

熵的定义为:

$$H(x) = - \int_R p(x) \ln p(x) dx \quad (2)$$

它是随机变量不确定性的量度, 或者说是平均信息量。也就是说在可能的不确定性区间中, 不确定性越大, 其熵越大。

1.2 最大熵概率估计基本公式

1957年, E. T. Jaynes 提出了最大熵原理^[12] (The maximum entropy principle 简称 MEP); 最少为偏见的概率分布是这样一种分布, 它使熵在已知信息的附加约束条件下达到最大化。可以简洁地理解为利用最大熵原理得到的概率分布是最无序的、最随机、含主观成分最少的概率分布。这个原理在数学上可表达为:

$$\max H(x) = - \int_R p(x) \ln p(x) dx \quad (3)$$

约束条件:

$$\int_R p(x) dx = 1 \quad (4)$$

$$\int_R p(x) dx = m_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

式中: $H(x)$ 是随机变量 x 的熵; $p(x)$ 是随机变量的概率密度函数; m_i 为随机变量的第 i 阶原点矩; R 为积分区间。

为了使随机变量的熵 $H(x)$ 在满足式(4)、(5)的条件下取得最大值, 特构造了如下所示的拉格朗日方程:

$$\bar{H} = H(x) + (\lambda_0 + 1) \left[\int_R p(x) dx - 1 \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[\int_R p(x) dx - m_i \right] \quad (6)$$

式中, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, 是拉格朗日乘子。

当满足 $\frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i} = 0$ 时, 可以得到:

$$p(x) = \exp(\lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) \quad (7)$$

这就是最大熵概率密度函数的表达式。

通过建立求解 $m+1$ 个关于 λ 的方程组后, 代入式(7)就可以得到随机变量的概率值了。

将式(7)代入式(4)有

$$\int_R \exp(\lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx = 1 \quad (8)$$

整理后有

$$e^{-\lambda_0} = \int_R \exp(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx \quad (9)$$

$$\lambda_0 = - \ln \left\{ \int_R \exp(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx \right\} \quad (10)$$

将式(9)对 λ 微分, 有

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_i} = - \int_R x^i \exp(\lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx = -m_i \quad (11)$$

将式(10)对 λ 微分可得

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_i} = - \frac{\int_R x^i \exp(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx}{\int_R \exp(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx} \quad (12)$$

由式(11)和式(12)可得

$$m_i = \frac{\int_R x^i \exp(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx}{\int_R \exp(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i) dx} \quad (13)$$

通过式(13)可建立求解 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的 m 个方程组, 求出 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 后, 可根据式(10)求出 λ_0 。

由式(7)、(10)、(13)可见, 拉格朗日乘子可由随机变量 n 阶矩(一般用 4 阶就可作出很好的密度函数)和积分变量上下界值确定, n 阶矩可现场谐波测量得到, 因此可用于描述随机谐波的概率密度函数。

2 随机矢量和高阶矩的求取

F 由各谐波源实测数据, 计算各谐波源处样本的各阶矩, 由各谐波源实测数据(即随机矢量) X, Y 分量的高阶矩求和代替随机矢量求和运算, 再用矩量平方换算给出矢量和(所求母线处)的 $2n$ 阶矩, 使用递推算法估计测量统计值各分量的 n 阶矩, 其推导过程如下:

$$\dot{A}_T = \sum_{i=1}^n A_i \cos \theta_i + j \sum_{i=1}^n A_i \sin \theta_i = \sum_{i=1}^n X_i + j \sum_{i=1}^n Y_i \quad (14)$$

式中, \dot{A}_T 为 n 个随机矢量 \dot{A}_i ($i = 1, \dots, n$) 的和; A_i 、 θ_i 分别为 \dot{A}_i 的幅值和相角; X_i 、 Y_i 分别为 \dot{A}_i 的 X、Y 分量。由式 (14) 可进一步推导出

$$\begin{cases} X_T = \sum_{i=1}^n X_i \\ Y_T = \sum_{i=1}^n Y_i \\ A_T^2 = X_T^2 + Y_T^2 \end{cases} \quad (15)$$

式中, X_T 、 Y_T 分别是和值 A_T 的 X、Y 分量。考虑到各分量相互独立, 因此有

$$\dot{w}_T^{(1)} = E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \dot{w}_i^{(1)} \quad (16)$$

$$\dot{w}_T^{(2k)} = E(\sum_{i=1}^n X_i^{2k}) \quad (17)$$

式中, $\dot{w}_T^{(1)}$ 、 $\dot{w}_i^{(1)}$ 分别为 X_T 和 X_i 的 1 阶矩; $\dot{w}_T^{(2k)}$ 为 X_T 的 $2k$ 阶矩, 它可由式 (18) 递推得到

$$\mu_{X_{m+1}}^{(2k)} = \mu_{X_m}^{(2k)} + \sum_{j=1}^{2k} C_{2k}^j \mu_{X_m}^{(2k-j)} \dot{w}_{m+1}^j \quad (18)$$

式中, $C_{2k}^j = \frac{2k!}{(2k-j)!j!}$ 是二项式系数; $\mu_{X_{m+1}}^{(2k)}$ 为 $m+1$ 个 X 分量之和的 $2k$ 阶矩; \dot{w}_{m+1}^j 为第 $m+1$ 个 X 分量的 j 阶矩。同理可推导出 Y 分量的 $\mu_{Y_{m+1}}^{(2k)}$ 和 \dot{w}_{m+1}^j , 进而得到

$$\dot{w}_{A_T}^{(2)} = \dot{w}_{X_T}^{(2)} + \dot{w}_{Y_T}^{(2)} \quad (19)$$

$$\dot{w}_{A_T}^{(2k)} = \dot{w}_{X_T}^{(2k)} + \sum_{j=1}^k C_k^j \dot{w}_{X_T}^{(2k-2j)} \dot{w}_{Y_T}^{(2j)} \quad (20)$$

求得矢量之和的各阶矩, 由此可算得 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 及 λ_0 , 最后得到谐波电压或者电流的概率分布函数。

全部计算过程如下: ①由各谐波源实测数据计算各阶矩; ②由式 (18) 求矢量之和在 X-Y 分量的 $2k$ 阶矩, 由式 (19) 和式 (20) 合成矢量和幅值的 $2k$ 阶矩; ③由式 (10)、(13) 求拉格朗日乘子; ④由式 (7) 得到矢量和 (幅值平方) 的 pdf; ⑤由得到的 pdf 计算 95% 概率值。

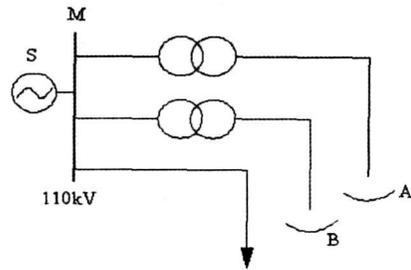


图 1 电弧炉供电系统简图

3 实测数据的应用分析

对在某电网内 110 kV 节点处所测数据进行分析, 电弧炉供电系统简图如图 1 所示。M 点母线带有 2 台 20 t 的电弧炉, 分别工作时用 TOPS 1000 电能质量监测仪采自变压器 110 kV 高压侧, 采用 3 s 均方值每 min 整理成一个数据, 1 d 内得到 1 440 个数据作为计算样本 (各谐波电流值为相对基波电流的百分值: 谐波电流 = 谐波电流值 / 基波电流值 $\times 100\%$),

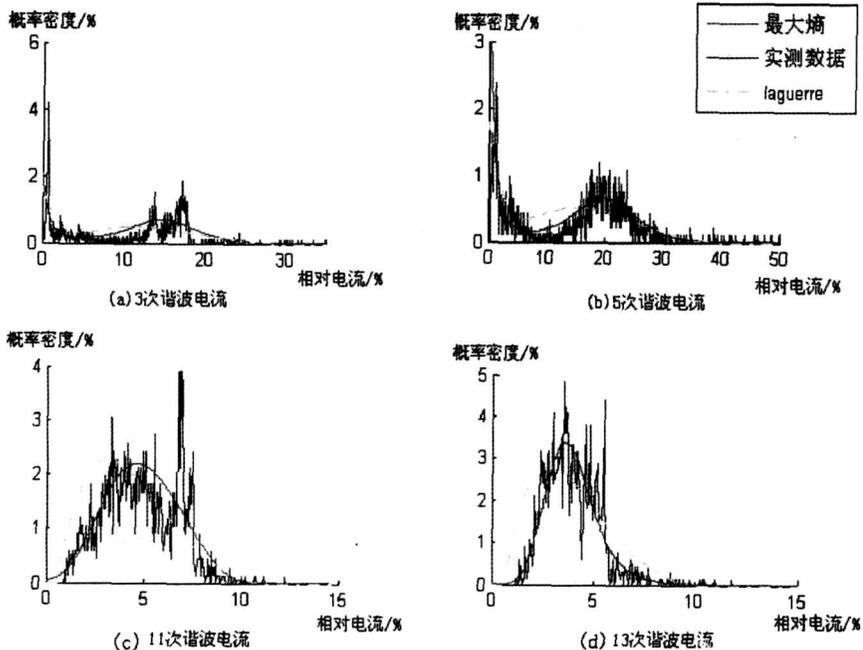


图 2 电弧炉谐波电流和的概率密度函数

表 1 电弧炉谐波电流和的 95% 概率值

谐波次数	最大熵估计值	Laguerre 估计值	实测值	最大熵相对误差 (%)	Laguerre 相对误差 (%)
3 次	21.565	21.98	19.605	9.997	12.114
5 次	36.347	34.139	35.923	1.180	4.966
11 次	8.095	8.256 4	7.583 2	6.749	8.878
13 次	6.454 9	6.831 6	6.285 1	2.702	8.695
平均误差 (%)				5.157	8.663 3

电流单位:基波电流的百分比

表 2 电弧炉谐波电流和的 99% 概率值

谐波次数	最大熵估计值	Laguerre 估计值	实测值	最大熵相对误差 (%)	Laguerre 相对误差 (%)
3 次	24.715	24.756	24.60	0.467	0.634
5 次	43.53	42.346	45.355	4.024	6.634
11 次	9.500 1	10.20	9.091	4.500	12.199
13 次	8.450 1	8.950 9	8.741	3.328	2.401
平均误差 (%)				3.079 7	5.467

电流单位:基波电流的百分比

利用前述的方法求逼近两台电弧炉谐波电流和分布的概率密度函数(阶矩取到 8 阶)并作其曲线图,如图 2 中规则实线所示,与按照文献 [11] 的方法以 Laguerre 多项式拟合概率密度函数(阶数取到 20 阶),如图 2 中规则虚线所示,并与实际测量值求和统计得到的谐波电流分布曲线(图 2 中不规则曲线)进行比较,最后比较谐波电流的 95% 概率值和 99% 概率值,并计算相对误差,如表 1、表 2 所示。所分析的谐波次数取 3、5、11、13 次。相对误差 = $\frac{\text{估计值} - \text{真实值}}{\text{真实值}} \times 100\%$ 。

由实例分析可以看出,由最大熵方法得到的逼近曲线和由 laguerre 多项式得到的逼近曲线都很好地拟合了谐波的实际分布。最大熵仅需样本 4 阶矩就能得到很好的逼近曲线,可以避免矢量和高阶矩的递推计算所带来的误差,同时避免 laguerre 多项式只能展开有限项出现的截断误差。测量数据的样本矩与利用积分公式直接积分得到的精确矩之间的误差,使得最大熵逼近概率密度函数与实际分布函数有一定差异。由以上计算结果可以看出最大熵方法得到的逼近函数的 95% 概率值与实际的 95% 统计值的平均相对误差仅为 5.157%,比由 laguerre 多项式得到的平均误差更小,因此,用此方法估计谐波的 95% 概率值是有效的。

4 结 论

利用最大熵原理能拟合随机变量和随机矢量(幅值)的 pdf 用前述的方法只要求的各随机矢量

在 X-Y 分量的 4 阶矩,就可以完成随机矢量求和计算并给出 pdf 不要求随机矢量具有在 $0 \sim 2\pi$ 的概率分布。最后采用最大熵原理获得的随机矢量和幅值的近似 pdf 与 2 个实测值相加得到的 pdf 进行对比,证明该方法的有效性。谐波电流 95% 概率值产生误差的原因,一方面是积分上下界值的选取不准确所带来的误差,一方面是样本矩与精确矩存在一定误差,各阶矩的精确计算还有待进一步探讨。同时,积分上下界的准确选取还需要进一步研究。

参考文献

- [1] 吴竞昌. 供电系统谐波 [M]. 北京: 中国电力出版社, 1998.
- [2] 杨洪耕, 肖先勇, 刘俊勇. 电能质量问题的研究和技术进展 (二)——电网谐波的测量与分析 [J]. 电力自动化设备, 2003, 23(11): 1-4.
- [3] Campinelli G, Esposito T, Varibne P, et al Probabilistic Harmonic Power Flow for Percentile Evaluation—IEEE Int [A]. Conference on Technology for the Millennium Toronto (Canada); 2001.
- [4] 田卫东. 以高阶累积量和高阶正交多项式级数展开式为基础的电力生产随机概率模拟方法 [J]. 电网技术, 1995, 19(1): 31-34.
- [5] 张晶. 多谐波源系统谐波叠加方法的研究 [J]. 电网技术, 1995, 19(3): 23-27.
- [6] 杨洪耕, 秦东, 张正书, 王刚. 用 Laguerre 多项式描述谐波随机求和问题 [J]. 电网技术, 2005, 29(14): 26-29.

(收稿日期: 2008-11-23)